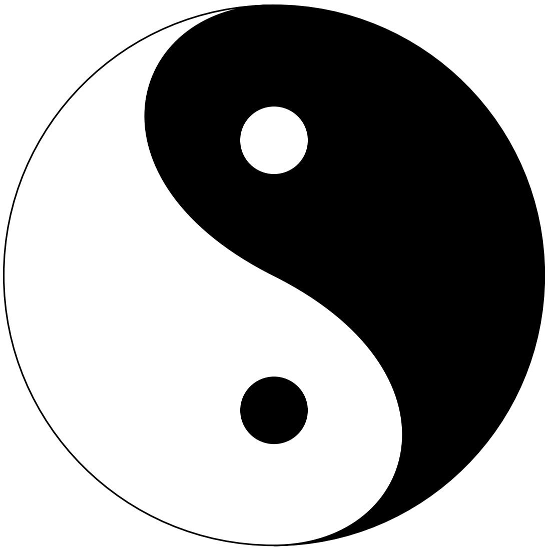
2022 年校际数学比赛参考解答

Complex2-老爹

contact@complex2math.com



December, 2022

There is more than one way to skin a cat.

Contents

Preface

比赛共有 12 题: 题 1 – 2 是填空题, 题 3 – 12 是证明题. 题 1 – 6 每题 10 分, 题 7 – 12 每题 20 分.

Please check https://complex2math.com/blog/macmo-2022-release/ for any update.

Problem 1. 若三角形的外接圆半径为 2, 这三角形的面积的最大值是多少?

Solution. 我们有 $a = 2r\sin A, b = 2r\sin B, c = 2r\sin C$,

$$[ABC] = \frac{1}{2}bc\sin A = 2r^2\sin A\sin B\sin C = 8\sin A\sin B\sin C.$$

于是问题归结为求

$$f(\alpha,\beta,\gamma) = \sin\alpha\sin\beta\sin\gamma \tag{1}$$

的最大值 with $0 < \alpha,\beta,\gamma < \pi$ and $\alpha+\beta+\gamma = \pi$. 利用 AM-GM 不等式, 我们有

$$f(\alpha,\beta,\gamma) \le \left(\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3}\right)^3.$$

Since $\sin x$ is concave in $(0,\pi)$, 由 Jensen 不等式知

$$\frac{\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma}{3} \le \sin\left(\frac{\alpha+\beta+\gamma}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

所以 $f(\alpha,\beta,\gamma) \le \frac{3\sqrt{3}}{8}$, 面积的最大值是 $\boxed{3\sqrt{3}}$.

Problem 2. 从 $0,1,2,3,4,5,6,7,8,9$ 这十个数中一次取出 3 个数, 使得其和为不小于 10 的偶数, 则不同的取法有多少种?

Solution. 答案是 $A+B$, 其中 A 是三个都是偶数的取法个数, B 是只有一个是偶数的取法个数. 我们有 $A = \binom{5}{3} - a = 20 - a$, 其中 a 是和为小于 10 的偶数的取法个数, 同理 $B = 5\times\binom{5}{2} - b = 50 - b$. 穷举知三个都是偶数的时候只能是 $(0,2,4),(0,2,6)$ 被排除, 所以 $a = 2$. 穷举只有一个是偶数的情形:

$$\begin{aligned}&(0,1,3),(0,1,5),(0,1,7),(0,3,5)\\&(2,1,3),(2,1,5),\\&(4,1,3).\end{aligned}$$

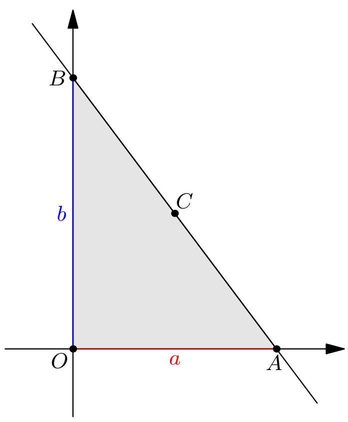
所以 $b = 7$, 所以取法个数是 $(10-2)+(50-7) = \boxed{51}$.

Problem 3. 设 O 为坐标平面上的原点, 一直线经过点 $(3,4)$ 并交 x-轴及 y-轴分别于 A 及 B 两点. 已知 $\triangle OAB$ 位于第一象限内, 试确定 $\triangle OAB$ 的面积的最小值, 并给出理由.

Solution. 问题归结为求

$$f(a,b) = ab = uv + 4u + 3v + 12 \tag{2}$$

在约束条件 $\frac{0-4}{a-3} = \frac{b-4}{0-3} \iff (a-3)(b-4) = 12$ and $u := a-3 > 0, v := b-4 > 0$ 下的最小值.



由 AM-GM 不等式知 $4u+3v \geq 2\sqrt{12uv}=24$, 所以 $f(a,b) \geq 12+24+12=48$, 面积的最小值是 $\boxed{24}$.

Problem 4. 试确定 $f(x)=x^3-3x-1$ 的最小值, 其中 x 是任意的正数, 并给出理由.

Solution. 求导 $f'(x)=3x^2-3$, 极值点只有 $x=1$. 所以最小值为 $f(1)=\boxed{-3}$.

Problem 5. 设 n 是任意的正整数, 记 $S_n=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$.

(i) 证明: $S_1=(\frac{1(1+1)}{2})^2$.

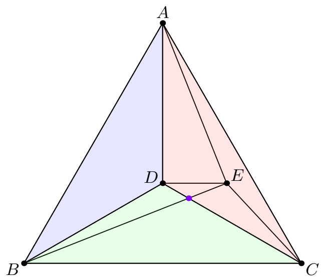
(ii) 如果 $S_n=(\frac{n(n+1)}{2})^2$, 证明: $S_{n+1}=(\frac{(n+1)(n+2)}{2})^2$.

Solution. (i) $S_1=1=(\frac{1(1+1)}{2})^2$. (ii) 我们有

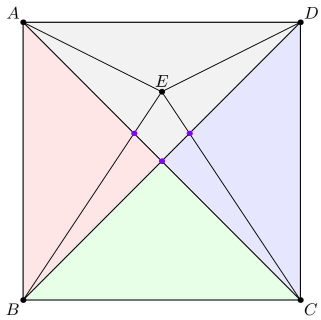
$$\begin{aligned}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right)^2-\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2&=\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}-\frac{n(n+1)}{2}\right)\left(\frac{(n+1)(n+2)}{2}+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\&=(n+1)^2\left(\frac{n+2}{2}-\frac{n}{2}\right)\left(\frac{n+2}{2}+\frac{n}{2}\right)\\&=(n+1)^3.\end{aligned}$$

Problem 6. 平面有 5 个点, 其中任意 3 个点均不共线, 以这些点为端点连接线段. 除这 5 个点外, 试确定这些线段的交点个数, 并给出证明.

Solution. 我们考虑凸包的点的个数 s. 假如 $s=3$, 可以不妨设 A,B,C,D 四点的位置如下



容易看出内部的 3 个三角形是地位对称的, 所以此时交点个数为 $\boxed{1}$. 假如 $s=4$, 可以不妨设 A,B,C,D 四点的位置如下



容易看出内部的 4 个三角形是地位对称的, 所以此时交点个数为 $\boxed{3}$. 假如 $s=5$, 可以不妨设 A,B,C,D,E 构成正五边形, 容易看出此时交点个数为 $\boxed{5}$.

Problem 7. 甲乙两人进行如下游戏, 甲先开始, 两人轮流从 $1, 2, \cdots, 100, 101$ 中每次任意勾去 9 个数, 经过这样 11 次勾掉后, 还剩两个数, 这时所余两个数之差即为甲的得分. 试证明: 不论乙怎样做, 甲有方法可至少取得 55 分.

Solution. 考虑如下配对:

$$A_i = \{i, i+55 : 1 \le i \le 46\}, \quad B = \{47, 48, \cdots, 55\}.$$

一开始甲先把 B 中的 9 个数勾掉. 设第 n 轮操作后剩余数字的全体为集合 S_n. 考虑

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \{A_i : |A_i \cap S_n| = 2\}, \\ \mathcal{B}_n &= \{A_i : |A_i \cap S_n| = 1\}, \\ \mathcal{C}_n &= \{A_i : |A_i \cap S_n| = 0\}. \end{aligned}$$

不论乙怎样操作, 甲总是能使得对任意奇数 $n \le 11$, 有 $|\mathcal{B}_n| = 0$. 于是最后剩余的两数 S_{11} 一定是某个 A_i. 而 A_i 的选取保证了甲的得分 ≥ 55.

Problem 8. 在圆周上任意写上 49 个 A 及 50 个 B, 然后每轮进行下列两项操作:

(i) 在两个相同字母之间写上 B, 在两个不同字母之间写上 A;

(ii) 擦掉原有的字母并保留刚写的字母.

接着轮流继续进行同样的操作. 问: 能否经有限轮操作后使得圆周上的字母都变成 B? 给出理由.

Solution. 答案是不能. 给 A 赋值 1 给 B 赋值 0, 在 modulo 2 的意义下我们有

$$(x_1, x_2, \cdots, x_{n-1}, x_n) \mapsto (x_1 + x_2, x_2 + x_3, \cdots, x_{n-1} + x_n, x_n + x_1)$$

观察 $\sum x_i$ 知一轮操作以后字母 A 的个数将一直是偶数.

Claim. 假设我们有 $2a, a > 0$ 个 A, 那么一轮操作后不可能所有字母都变成 B.

这是因为 $a \neq 0$, 并且字母的总个数 99 是奇数, 所以一定存在相邻的两个字母满足其中一个是 A, 另一个是 B. 这两个字母便确保一轮操作之后字母 A 的个数不可能是 0.

Problem 9. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为正数. 求证以下不等式:

(i) $(x_1 + \frac{1}{x_1})(x_2 + \frac{1}{x_2}) \ge (x_1 + \frac{1}{x_2})(x_2 + \frac{1}{x_1})$.

(ii) $(x_1 + \frac{1}{x_1}) \cdots (x_{n-1} + \frac{1}{x_{n-1}})(x_n + \frac{1}{x_n}) \ge (x_1 + \frac{1}{x_2}) \cdots (x_{n-1} + \frac{1}{x_n})(x_n + \frac{1}{x_1})$.

Solution. (i) 是 (ii) 的特殊情况, 我们只需证 (ii). 因为 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 都是正数, 所以 (ii) 等价于

$$(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) \cdots (x_n^2 + 1) \ge (x_1 x_2 + 1)(x_2 x_3 + 1) \cdots (x_n x_1 + 1). \tag{3}$$

由 Cauchy 不等式, 我们有

$$\begin{aligned} (x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1) &\ge (x_1 x_2 + 1)^2, \\ (x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1) &\ge (x_2 x_3 + 1)^2, \\ &\cdots, \\ (x_{n-1}^2 + 1)(x_n^2 + 1) &\ge (x_{n-1} x_n + 1)^2, \\ (x_n^2 + 1)(x_1^2 + 1) &\ge (x_n x_1 + 1)^2, \end{aligned}$$

全部乘起来便证明了 Equation (3).

Problem 10. 试确定 (并给出证明) 最小的实数 C 使得对满足 $\sum_{j=1}^n x_j = 1$ 的任意正实数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 都有 $C\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{1-x_j} \geq 1$.

Solution. 答案是 $\boxed{n-1}$. 由 Cauchy 不等式我们有

$$\sum_{j=1}^n \frac{x_j^2}{1-x_j} \geq \frac{(\sum_{j=1}^n x_j)^2}{n-\sum_{j=1}^n x_j} = \frac{1}{n-1}.$$

Problem 11. 求证: 对任意的正数 x, y, z, 以下不等式成立

$$xyz(x+2)(y+2)(z+2) \leq \left(1+\frac{2(xy+yz+zx)}{3}\right)^3$$

Solution. 不等式是对称的, 但不是齐次的, 容易看出取等的时候 $x=y=z=1$, 所以我们肯定会用到 $(x-1)^2 \geq 0 \iff x^2+1 \geq 2x$. 右边的 3 次方肯定是 AM-GM 不等式产生出来的, 在凑 AM-GM 的时候, 我们发现右边的 $xy+yz+zx$ 很讨厌 (这是因为 $xy+yz+zx$ 是一个比较小的东西, say $xy+yz+zx \leq x^2+y^2+z^2$). 于是我们考虑换元

$$(a,b,c) = (\sqrt{xy}, \sqrt{yz}, \sqrt{zx}) \iff (x,y,z) = \left(\frac{ca}{b}, \frac{ab}{c}, \frac{bc}{a}\right),$$

恶心的 $xy+yz+zx$ 变成了 $a^2+b^2+c^2$. 我们再计算 LHS:

$$\begin{aligned}
\text{LHS} &= \prod_{\text{cyc}} x(x+2) \\
&= \prod_{\text{cyc}} \frac{ca}{b}\left(\frac{ca}{b}+2\right) \\
&= abc\prod_{\text{cyc}}\left(\frac{ca}{b}+2\right) \\
&= (ca+2b)(ab+2c)(bc+2a).
\end{aligned}$$

利用 $2a \leq a^2+1, ab+bc+ca \leq a^2+b^2+c^2$ 以及 AM-GM 不等式, 我们有

$$\text{LHS} \leq \left(\frac{(ab+bc+ca)+(a^2+b^2+c^2)+3}{3}\right)^3 \leq \left(1+\frac{2(a^2+b^2+c^2)}{3}\right)^3 = \text{RHS}$$

Problem 12. 试找出所有能表成以下形式的整数: $\frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, 其中 a, b, c 为两两互素的正整数.

Solution. 设 $f(a,b,c) := \frac{b}{a}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{c}$, 我们先证明一个引理:

Lemma 1. *设 a, b, x, y 是正整数满足 $\gcd(a,b)=1$, then*

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b} \in \mathbb{Z}$$

if and only if $a \mid x$ and $b \mid y$.

Proof. 在 $\gcd(a,b)=1$ 的条件下我们有

$$\begin{aligned}\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\in\mathbb{Z} &\iff ab\mid bx+ay\\ &\iff a\mid bx+ay \quad\text{and}\quad b\mid bx+ay\\ &\iff a\mid bx \quad\text{and}\quad b\mid ay\\ &\iff a\mid x \quad\text{and}\quad b\mid y\end{aligned}$$

■

Applying Lemma 1 with $\gcd(a,bc)=1$ yields $a\mid b+c$, 再利用 a,b,c 的对称性我们有

$$\begin{aligned}a&\mid b+c\\ b&\mid c+a\\ c&\mid a+b\end{aligned}\tag{4}$$

不妨设 $a\le b\le c$ (还是因为 a,b,c 对称), then $a+b\le 2c$. 若 $a+b=2c$, 则只能是 $a=b=c=1$, 此时 $f(a,b,c)=\boxed{6}$. 下面我们总是假设 $a+b=c$. 由 Equation (4) 知 $a\mid 2b, b\mid 2a$, 所以只能是 $(a,b,c)=(1,1,2)$ 或 $(1,2,3)$, 此时 $f(a,b,c)=\boxed{7}$ 或 $\boxed{9}$.