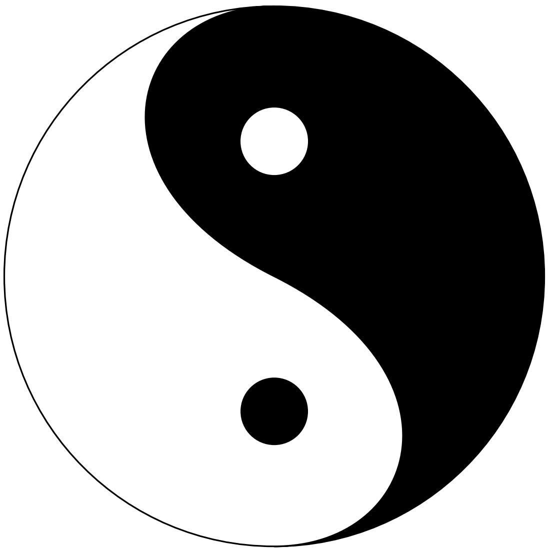
# 2021 年校际数学比赛参考解答

Complex2-老爹

contact@complex2math.com



August, 2021

*There is more than one way to skin a cat.*

# Contents

# Preface

此卷有 10 道题目: 题 1 – 3 每题 8 分; 题 4 – 6 每题 10 分; 题 7 – 10 每题 12 分.

Please check https://complex2math.com/blog/macmo-2021-release/ for any update.

**Problem 1.** 简化以下的和 $1+\sum_{n=1}^{2021}(-1)^n\frac{n^2+n+1}{n!}$.

*Solution.* 想办法裂项

$$a_n := \frac{n^2+n+1}{n!} = \frac{n(n-1)+2n+1}{n!} = \frac{1}{(n-2)!} + \frac{2}{(n-1)!} + \frac{1}{n!}. \tag{1}$$

注意到连续的三项会把分母为 $n!$ 的那一项给消掉, 所以

$$\begin{aligned}1+\sum_{n=1}^{2021}(-1)^n a_n &= 1-a_1+a_2+(-a_3+a_4-\cdots)\\ &= 1-a_1+a_2+\left(\frac{(-1)^3}{(3-2)!}+\frac{(-1)^3\cdot 2}{(3-1)!}+\frac{(-1)^4}{(4-2)!}+\right.\\ &\qquad\left.\frac{(-1)^{2020}}{2020!}+\frac{(-1)^{2021}\cdot 2}{(2021-1)!}+\frac{(-1)^{2021}}{2021!}\right)\\ &= 1-3+\frac{7}{2}-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{2020!}-\frac{1}{2021!}\\ &= \boxed{-\frac{2022}{2021!}.}\end{aligned}$$

**Remark.** 考基本的代数变形.

**Problem 2.** 记 $P(x)=x^2+ax+b$, 其中 $a,b\in[-2,2]$. 当 $a,b$ 在闭区间 $[-2,2]$ 上变动时, 求二次方程 $P(x)=0$ 的实数解的取值范围.

*Solution.* $\Delta=a^2-4b\le 12$. 易知答案为

$$\boxed{\frac{-2-\sqrt{12}}{2}} \le \frac{-a\pm\sqrt{\Delta}}{2} \le \boxed{\frac{2+\sqrt{12}}{2}.}$$

**Problem 3.** 在 $xy$ 平面上, 记 $f(a,b)$ 为点 $(a,b)$ 到直线 $\ell: 3x+4y=1$ 的距离. 当 $a,b$ 走遍所有整数且 $(a,b)$ 不在直线 $\ell$, 确定 $f(a,b)$ 的最小值.

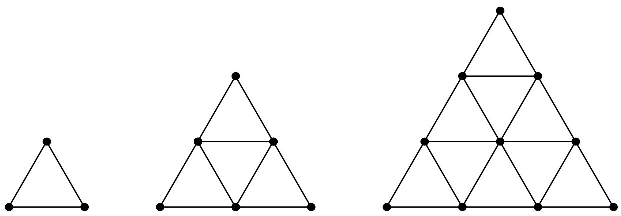
*Solution.* 回忆点到直线的距离公式

$$d=\left|\frac{3a+4b-1}{\sqrt{3^2+4^2}}\right|. \tag{2}$$

题目的要求为 $a,b\in\mathbb{Z}$ 且 $3a+4b-1\ne 0$, 注意到 $3a+4b-1\in\mathbb{Z}$, 所以

$$d_{\min}=\boxed{\frac{1}{5}.}$$

**Problem 4.** 将边长为 $n$ 的等边三角形的每条边等分 $n$ 份, 然后用平行这三边的线段连起这些等分点, 得出一些由边长为 1 的等边三角形所组成的图形 $S_n$. 设图形 $S_n$ 共有 $N_n$ 个边长 1 至 $n$ 的等边三角形. 下图给出当 $n=1,2,3$ 的图形, $N_1=1, N_2=5$. 试找出用 $n$ 表示 $N_n$ 的公式.




*Solution.* 我们把等边三角形划分为两类: 一类头朝上, 一类头朝下, 以 $n=2$ 为例, 有 4 个头朝上的三角形, 1 个头朝下的三角形. 设 $a_i(n)$ 为 $S_n$ 中边长为 $i$ 的头朝上的等边三角形的个数. 注意到一个等边三角形被它的一条水平方向的边, 以及头的朝向给唯一决定, 所以

$$a_i(n)=(n-i+1)+(n-1-i+1)+\cdots+1. \tag{3}$$

以 $n=3$ 为例, 最底层 (记为第 0 层) 长度为 3, 贡献 $3-i+1$ 个边长为 $i$ 的头朝上的等边三角形, 上一层 (记为第 1 层) 长度为 2, 贡献 $2-i+1$ 个边长为 $i$ 的头朝上的等边三角形. 我们有

$$\begin{aligned} a_1(n)&=1+2+\cdots+(n-1)+n\\ a_2(n)&=1+2+\cdots+(n-1)\\ &\cdots\\ a_n(n)&=1. \end{aligned}$$

换序求和便知

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n a_i(n)&=\sum_{i=1}^n i\cdot(n+1-i)=(n+1)\cdot\sum_{i=1}^n i-\sum_{i=1}^n i^2\\ &=(n+1)\cdot\frac{n(n+1)}{2}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}. \end{aligned}$$

设 $b_i(n)$ 为 $S_n$ 中边长为 $i$ 的头朝下的等边三角形的个数. 对于第 $j$ 层, 它的长度为 $n-j$, 它不可能贡献边长 $>j$ 的头朝下的等边三角形. 类似于 eq. (3) 我们可以得到

$$b_i(n)=(n-i-i+1)+\cdots+1, \tag{4}$$

其中 $n-i-i+1$ 由第 $i$ 层贡献. 我们有

$$\begin{aligned} b_1(n)&=1+2+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1)\\ b_2(n)&=1+2+\cdots+(n-3)\\ &\cdots\\ b_i(n)&=1+2+\cdots+(n-2i+1). \end{aligned}$$

不难计算得

$$\sum_i b_i(n)=\begin{cases} \frac{(n+1)(n-1)(2n+3)}{24}, & \text{if } n \text{ is odd;}\\ \frac{n(n+2)(2n-1)}{24}, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases} \tag{5}$$

这里以 $n=2k-1$ 为例, 此时

$$\begin{aligned} b_1(n) &= 1+2+\cdots+(n-3)+(n-2)+(n-1), \\ &\dots \\ b_{k-2}(n) &= 1+2+3+4+5+6, \\ b_{k-1}(n) &= 1+2+3+4, \\ b_k(n) &= 1+2. \end{aligned}$$

所以

$$\sum_i b_i(n) = \sum_{i=1}^{k-1}(k-i)(-1+4i) = \frac{k(k-1)(4k+1)}{6}.$$

We finally conclude that

$$\boxed{N_n = \begin{cases} \frac{(n+1)(2n^3+3n-1)}{8}, & \text{if } n \text{ is odd;} \\ \frac{n(n+2)(2n+1)}{8}, & \text{if } n \text{ is even.} \end{cases}}$$

**Problem 5.** (i) 设 $x,y,z$ 为正数, 求证 $x^{x-y}y^{y-z}z^{z-x} \geq 1$.

(ii) 设 $a,b,c$ 为正数, 求证 $a^4+b^4+c^4 \geq a^2bc+ab^2c+abc^2$.

*Solution.* (i) 不妨设 $x=\min\{x,y,z\}, y=x+a, z=x+b$, 其中 $a,b \geq 0$. 问题归结为

$$1 \leq x^{-a}(x+a)^{a-b}(x+b)^b = \left(\frac{x+a}{x}\right)^a \left(\frac{x+b}{x+a}\right)^b = \left(\frac{x+a}{x}\right)^{a-b} \left(\frac{x+b}{x}\right)^b. \tag{6}$$

容易看出, 无论 $a \geq b$ 还是 $a \leq b$, eq. (6) 都成立.
(ii) 非常容易就能凑出来的局部:

$$a^4+a^4+b^4+c^4 \geq 4a^2bc. \tag{7}$$

**Remark.** (i) 做不等式的时候, 我们一定要搞清楚它到底是**轮换**的还是**对称**的. 对于对称的不等式, 我们可以直接不妨排好一个序 $x \geq y \geq z$; 对于轮换的不等式, 我们只能不妨假设其中某个变量是最小值或最大值.
(ii) 事实上这就是熟知的 Muirhead's inequality. 不过既然作为考题, 那么肯定就是考你用 AM-GM 不等式[1]来证明这个特殊情形 ($(4,0,0)$ 优于 $(2,1,1)$) 的 Muirhead's inequality, 而不是让你直接一句话 As $(4,0,0)$ majorizes $(2,1,1)$, the result then follows by Muirhead's inequality 秒杀. 注意 Muirhead's Inequality 的条件是**对称**不等式, 一个常见的错误理解是: 由 Muirhead's Inequality 知 $a^3+b^3+c^3 \geq a^2b+b^2c+c^2a$.

[1]你应该知道 Muirhead's Inequality 是由 AM-GM 不等式推出来的, 或者说 Muirhead's Inequality 实质上就是 AM-GM 不等式的推广

**Problem 6.** 定义 $f(x)=\frac{9^x}{9^x+3}$. 计算 $f(\frac{1}{2021})+f(\frac{2}{2021})+\cdots+f(\frac{2020}{2021})$.

*Solution.* 注意到

$$f(a)+f(1-a)=\frac{3^{2a}}{3^{2a}+3}+\frac{3^{2-2a}}{3^{2-2a}+3}=\frac{3^{2a}}{3^{2a}+3}+\frac{3}{3+3^{2a}}=1 \tag{8}$$

对任意 $a\in(0,1)$ 成立. 故答案为 $\boxed{1010.}$

**Problem 7.** 记 $[x]$ 为小于或等于 $x$ 的最大整数. 如 $[\pi]=3$. 定义数列 $a_1,a_2,\cdots$ 如下:

$$\text{当 } n\geq 1,\quad a_n=\frac{1}{n}\left(\left[\frac{n}{1}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{n}{n}\right]\right).$$

(a) 求证: 存在无穷多个整数 $n\geq 1$ 使得 $a_{n+1}>a_n$;

(b) 确定并证明: 是否存在无穷多个整数 $n\geq 1$ 使得 $a_{n+1}<a_n$.

*Solution.* (b) 设 $a_n=\frac{1}{n}S_n$. 注意到我们有

$$\begin{aligned}S_{n+1}-S_n=&\left(\left[\frac{n+1}{1}\right]-\left[\frac{n}{1}\right]\right)+\left(\left[\frac{n+1}{2}\right]-\left[\frac{n}{2}\right]\right)+\cdots+\\&\left(\left[\frac{n+1}{n}\right]-\left[\frac{n}{n}\right]\right)+\left(\left[\frac{n+1}{n+1}\right]-\left[\frac{n}{n+1}\right]\right).\end{aligned}$$

对 $1\leq d\leq n+1$, 显然 $[\frac{n+1}{d}]-[\frac{n}{d}]=0$ 或 1, 并且

$$\left[\frac{n+1}{d}\right]-\left[\frac{n}{d}\right]=1\iff d\mid n+1.$$

所以 $S_{n+1}-S_n=\phi(n+1)$,

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}\phi(i). \tag{9}$$

其中 $\phi(n+1)$ 表示 $n+1$ 的因子的个数, 也就是说, 如果 $n+1$ 的素因子分解为 $p_1^{e_1}\cdots p_r^{e_r}$, 则 $\phi(n+1)=(e_1+1)\cdots(e_r+1)$. 此时问题可化简为: 是否存在无穷多个整数 $n\geq 1$, 使得 $\frac{S_{n+1}}{n+1}<\frac{S_n}{n}$, which is equivalent to

$$\phi(n+1)<\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\phi(i)=a_n. \tag{10}$$

显然, 当 $n+1$ 为某个素数时, $\phi(n+1)=2$, 而对任意整数 $i\geq 2,\phi(i)\geq 2$, 由此不难看出 $a_n>2$ whenever $n\geq 6$. 所以, 当 $n=P-1$ 时, 其中 $P\geq 7$ 是素数, 就有 $a_{n+1}<a_n$, 而素数熟知是有无穷多个的.
(a) 显然 $[x]\leq x$, 所以 $a_n\leq\frac{1}{n}(\frac{n}{1}+\cdots+\frac{n}{n})=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}=:H_n$, 其中 $H_n$ 为熟知的调和级数.

**Lemma 1.** 对 $n=2^k$, 我们有 $1+\frac{k}{2}\leq H_n$ 以及 $H_{n-1}\leq k$. 特别的, 调和级数发散.

*Proof.* 经典的放缩:

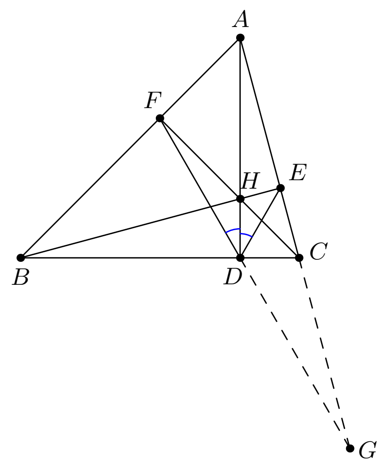
$$\begin{aligned}&1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\geq\\&\qquad 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots=1+\frac{k}{2}.\end{aligned}$$

以及

$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}\right)+\cdots\le$$
$$1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots=k.$$

当 $n=2^k-1$ 时, 我们有 $\phi(n+1)=k+1>k\ge H_n\ge a_n$, which is equivalent to $a_{n+1}>a_n$ (c.f. eq. (10)).

**Problem 8.** 如图在锐角三角形 $ABC$ 中, $AD$ 是边 $BC$ 上的高, $H$ 是线段 $AD$ 内任一点, $BH$ 和 $CH$ 的延长线分别交 $AC$ 和 $AB$ 于 $E$ 和 $F$, 求证 $\angle EDH=\angle FDH$.




*Solution.* 设 $DF$ 交 $AC$ 于 $G$, 则由完全四边形的性质知 $(C,A;E,G)$ 构成调和点列.

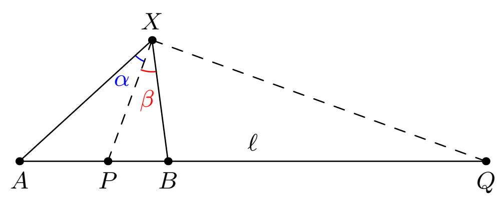
**Lemma 2** (调和点列的性质)**.** *设 $A,B,P,Q$ 是直线 $\ell$ 上的 4 个点, $X$ 是不在 $\ell$ 上的任意一点, 则以下 4 个陈述, 任意 2 个可以推出另外 2 个:*

(i) *$(A,B;P,Q)$ 构成调和点列.*

(ii) *$XP$ 是 $\angle AXB$ 的内角平分线.*

(iii) *$XQ$ 是 $\angle AXB$ 的外角平分线.*

(iv) *$XP\perp XQ$.*




*Proof.* 这里只证明 (iv) 和 (i) 可以推出 (ii) 和 (iii). 设 $\alpha=\angle AXP,\beta=\angle BXP$, 由 (iv) 知

$$\frac{PA}{PB}=\frac{XA\sin\alpha}{XB\sin\beta},\quad \frac{QA}{QB}=\frac{XA\sin(90^\circ+\alpha)}{XB\sin(90^\circ-\beta)}. \tag{11}$$

再由 (i) 知 $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB}$, 所以

$$\sin\alpha\cos\beta = \cos\alpha\sin\beta \iff \sin(\alpha-\beta) = 0.$$

因为 $X$ 不在直线 $\ell$ 上, 所以 $\alpha - \beta < 180°$, 所以只能是 $\alpha = \beta$. (ii) 和 (iv) 推出 (iii) 是显然的. ■

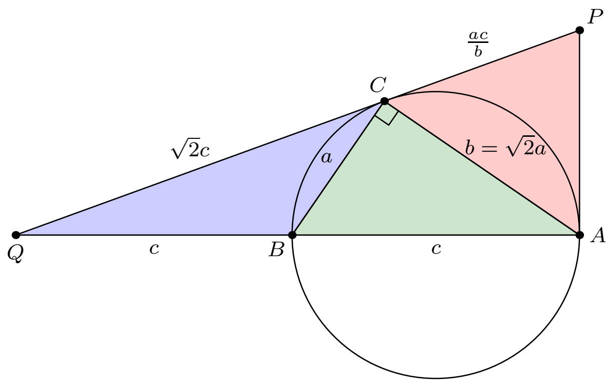
The result then follows by lem 2.

**Problem 9.** 确定实系数多项式 $P(x)$ 使得多项式 $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ 只有常数项.

*Solution.* 显然 $P(x)$ 为常数满足题意, 下面假设 $\deg P(x) \geq 1$. 设 $P(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i, Q(x) := (x+1)P(x-1) - (x-1)P(x) = P(x-1) + P(x) - x(P(x) - P(x-1))$. 显然 $P(x-1) + P(x)$ 的首项系数为 $2a_n$, 而 $x(P(x) - P(x-1))$ 的首项系数为 $na_n$, 所以只能是 $n = 2$. 设 $P(x) = ax^2 + bx + c$, 则 $Q(x) = (b-a)x + (2c + a - b)$, 由此推出 $b = a$. 综上, 满足题意的实系数多项式为

$$P(x) = ax^2 + ax + c, \quad a, c \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

**Problem 10.** 已知在 $\triangle ABC, \angle A < \angle B < 90°$. 圆 $\Gamma$ 过点 $A, B, C$. 圆 $\Gamma$ 过点 $A, C$ 的两条切线交于 $P$. 直线 $AB$ 与 $PC$ 交于 $Q$. 若三角形 $ACP, ABC, BQC$ 有相同的面积, 求证 $\angle BCA = 90°$.




*Solution.* 我们用 $[XYZ]$ 表示 $\triangle XYZ$ 的面积. 我们有

$$\begin{aligned}
&\angle PCA = \angle PAC = \angle B,\\
&\angle CPA = 180° - 2\angle B,\\
&\angle CQB = 180° - \angle CPA - \angle BAP = \angle B - \angle A,\\
&\angle QCB = \angle A.
\end{aligned} \tag{13}$$

因为 $[CQB] = [ACB]$, 且它们的高相等, 所以 $QB = c$. 因为 $QC$ 是切线, 所以 $QC^2 = QB \cdot QA \implies QC = \sqrt{2}c$. 由 $\triangle QCB \sim \triangle QAC$ 我们还可得出 $b = \sqrt{2}a$. 注意到

$$\frac{1}{2}BA \cdot BC \cdot \sin\angle B = [ACB] = [APC] = \frac{1}{2}CA \cdot CP \cdot \sin\angle B,$$

this implies that

$$PA = PC = \frac{ac}{b} = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

另一方面, 我们还有

$$\cos\angle B=\frac{\frac{1}{2}AC}{CP}=\frac{b}{\sqrt{2}c}=\frac{a}{c}.$$

这就证明了 $\angle BCA=90^\circ$.