2020 年校际数学比赛参考解答

Complex2-老爹

contact@complex2math.com

Feburary, 2021

There is more than one way to skin a cat.

Contents

Preface

此卷共有 16 题, 其中题 1-5 是证明题, 每题 **15** 分, 必须写出完整的计算或证明; 题 6-9 是选择题, 每题 **5** 分, 只需在方格填写英文字母 A, B, C, D, E; 题 10-16 是填空题, 每题 **8** 分, 只需填写正确答案, 不需填写过程.

Please check https://complex2math.com/blog/macmo-2020-release/ for any update.

Problem 1. 5 位朋友各有一枚金币, 他们同时把自己唯一的一枚金币送予其他四位朋友之一, 当完成交换金币后这称之为一种操作. 问: 有多少种不同的操作使得操作后这 5 位朋友各仍有一枚金币?

Solution. 一种操作相当于一个映射 $\varphi : \{1,2,3,4,5\} \to \{1,2,3,4,5\}$, 第 i 位朋友将自己的金币送予第 $\varphi(i)$ 位朋友. 条件仍各有一枚金币即 φ 是一个排列 (双射), 条件送予其他四位朋友之一即 $\varphi(i) \neq i$ (没有不动点). 问题归结为错排公式 (c.f. [1])

$$D_n = n!\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

令 $n = 5$, 答案为 $\boxed{44.}$

Remark. 注意到 $4! = 24, 5! = 120$, 所以刚好不能穷举.

Problem 2. 定义数列 $\{x_n\}_{n\geq 1}$ 如下: $x_1 = 5$ 及 $x_{k+1} = x_k^2 - 3x_k + 3$ 当 $k = 1, 2, 3, \cdots$. 求证: 对任意 $k \geq 0$, 有 $x_{k+1} \geq 3^{2^k}$.

Solution. 我们用数学归纳法证明更强的结论:

Claim. $x_{k+1} \geq 3^{2^k} + 2 =: y_{k+1} + 2$.

注意到 $y_{k+2} = y_{k+1}^2$. 当 $k = 0$ 时, $x_1 = 5 = 3 + 2$. 假设结论对 $k = n$ 成立, 则当 $k = n + 1$ 时, 我们有

$$\begin{aligned} x_{n+2} &= x_{n+1}^2 - 3x_{n+1} + 3 \\ &\geq (y_{n+1} + 2)^2 - 3(y_{n+1} + 2) + 3 \\ &= y_{n+1}^2 + y_{n+1} + 4 - 6 + 3 \\ &\geq y_{n+2} + 2. \end{aligned}$$

其中两个 $\geq$ 都是因为 $y_{n+1} \geq 1$.

Remark. 主动加强归纳条件的典型问题.

Problem 3. 设 a, b, c 为正数且满足 $a + b + c = 2$. 求证:

$$\frac{(a-1)^2}{b} + \frac{(b-1)^2}{c} + \frac{(c-1)^2}{a} \geq \frac{1}{4}\left(\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a}\right).$$

Solution. 首先注意到右边是对称的, 但左边只是轮换的. 我们希望把轮换的变成对称的. 利用 $a+b+c = 2$ 我们有

$$\begin{aligned} \text{LHS} &= \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 - 2a + 1}{b} = \sum_{\text{cyc}} \frac{a^2 - (a+b+c)a + 1}{b} \\ &= \sum_{\text{cyc}} \frac{-ab - ac + 1}{b} = \sum_{\text{cyc}} \left(-a - \frac{ac}{b} + \frac{1}{b}\right) \\ &= -\sum_{\text{cyc}} a - \sum_{\text{cyc}} \frac{ac}{b} + \sum_{\text{cyc}} \frac{(a+b+c)^2}{4b} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{a^2+c^2}{b} + \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} b - \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{2ac}{b} \\ &= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} \frac{(a-c)^2}{b} + \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}} b. \end{aligned}$$

其次我们还有

$$\begin{aligned}\sum_{\text{cyc}}\left(b-\frac{a^2+b^2}{a+b}\right) &= \sum_{\text{cyc}}\left(b-(a+b)+\frac{2ab}{a+b}\right)\\ &= \sum_{\text{cyc}}\left(-\frac{a+b}{2}+\frac{2ab}{a+b}\right)\\ &= \sum_{\text{cyc}}-\frac{1}{2(a+b)}(a-b)^2.\end{aligned}$$

于是, 问题归结于证明

$$\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2(b+c)}\right)(b-c)^2 =: \sum_{\text{cyc}} S_a(b-c)^2 \ge 0. \tag{1}$$

这正是 S.O.S 标准形式.

Theorem 1 (S.O.S)**.** *Consider the expression*

$$S = f(a,b,c) = S_a(b-c)^2 + S_b(c-a)^2 + S_c(a-b)^2,$$

where S_a, S_b, S_c are functions of a, b, c. Then $S \ge 0$ if any of the following take place:

(i) $S_a, S_b, S_c \ge 0$.

(ii) $a \ge b \ge c$ *and* $S_b, S_b + S_c, S_b + S_a \ge 0$.

(iii) $a \ge b \ge c$ *and* $S_a, S_c, S_a + 2S_b, S_c + 2S_b$.

(iv) $a \ge b \ge c$ *and* $S_b, S_c \ge 0, a^2 S_b + b^2 S_a \ge 0$.

(v) $S_a + S_b + S_c \ge 0$ *and* $S_aS_b + S_bS_c + S_cS_a \ge 0$.

Proof. See [2]. ■

因为 eq. (1) 是对称的, 我们可以不妨假设 $a \ge b \ge c > 0$. 显然 $S_b, S_c \ge 0$, 最后再注意到

$$S_b + S_a = \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{2(c+a)}\right) + \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{2(b+c)}\right) \ge 0.$$

Then we are done by part (ii) of thm 1.

Remark. 这道题花了我最久的时间, 可能是因为我不等式太菜了. 一开始觉得不会很难估计能轻松凑个局部出来, 结果根本凑不动, 各种代数变形后阴差阳错得到了一个 S.O.S 形式.

Alternative solution. 由 Cauchy 不等式, $a, b, c > 0$ 知

$$\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}\right)(a+b) \ge (|x|+|y|)^2 \ge (x+y)^2 \implies \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b} \ge \frac{(x+y)^2}{a+b}.$$

于是我们有

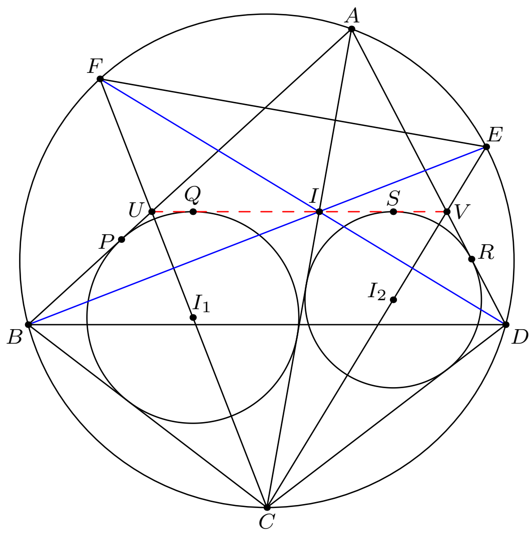
$$\begin{aligned}\text{LHS} = \sum_{\text{cyc}}\frac{(a-1)^2}{b} &= \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{(a-1)^2}{b}+\frac{(b-1)^2}{c}\right)\\ &\ge \frac{1}{2}\sum_{\text{cyc}}\frac{(a-1+b-1)^2}{b+c}\\ &= \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}}\frac{2c^2}{b+c},\end{aligned}$$

所以

$$\text{LHS} - \text{RHS} \geq \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}}\left(\frac{c^2-b^2}{b+c}\right) = \frac{1}{4}\sum_{\text{cyc}}(c-b) = 0.$$

Problem 4. 如图所示 $ABCD$ 为圆内接四边形, $\odot I_1$ 和 $\odot I_2$ 分别是 $\triangle ABC$ 和 $\triangle ADC$ 的内切圆. 若 $\angle BAC = \angle DAC$, 求证 $\odot I_1$ 与 $\odot I_2$ 的某一条外公切线与 BD 平行.

Solution. 如图, 作 $\angle ACB, \angle ACD$ 的角平分线, 分别交外接圆于 F, E, 交 AB, AD 于 U, V. 设 I 是 $\triangle ABD$ 的内心, then it is well-known that I 是 $\triangle CEF$ 的垂心, 并且 A, B, D 分别是 I 关于 EF, FC, CE 的反射 (reflection). 由此便推出 IU, IV 分别是 $\odot I_1, \odot I_2$ 的切线.



导角

$$\angle FIU + \angle EIV = \angle FBA + \angle EDA = \angle FCE = 180^\circ - \angle FIE$$

便知 U, I, V 三点共线. 最后, 注意到

$$\angle ABD + \angle BUI = \angle ABD + 2\angle BUC = 180^\circ,$$

所以 UV 平行于 BD.

Problem 5. (a) 试求四个连续正整数使得最大数的立方是其余三个数的立方之和.

(b) 求满足 $x^3 + y^3 + 3xy = 1$ 的所有整数对 (x, y).

Solution. (a) 设这四个数为 $a, a+1, a+2, a+3$, 我们有 $(a+3)^3 = a^3 + (a+1)^3 + (a+2)^3 \implies 0 = a^3 - 6a - 9 = (a-3)(a^2+3a+3)$. 所以答案是 $\boxed{3, 4, 5, 6.}$

(b) 若 $xy = 0$, 则只可能是 $(x, y) = (1, 0), (0, 1)$.

若 $xy > 0$, 则必有 $x, y < 0$, 不妨假设 $x \leq y$. 若 $|x| \geq 3$, 则 $x^3 + 3xy < 0$, 矛盾, 所以必须是 $|x| \geq 2$. 容易验证 $(-2, -2), (-2, -1), (-1, -2)$ 都不是解.

若 $xy<0$, 不妨设 $y<0$, 用 $y=-z$ 换元得 $x^3-z^3-3xz=1$, 其中 $x>z>0$. 注意到

$$x^3-z^3-3xz=(x-z)(x^2+xz+z^2)-3xz=(x-z-3)xz+(x-z)(x^2+z^2).$$

于是必有 $x-z<3$. 若 $x-z=2$, 则有 $1=2(x^2+z^2)-xz=2((z+2)^2+z^2)-(z+2)z \implies 3z^2+6z+7=0$, 无解. 若 $x-z=1$, 容易验证此时 $(x,z)=(t+1,t)$ 对任意非零整数 t 都是解.
综上, 所有的整数解为 $\boxed{(t+1,-t),(-t,t+1),t\in\mathbb{Z}_{\geq 0}.}$

Problem 6. $N=2020^2-2019^2+2018^2-\cdots+2^2-1^2$.
A. $N<0$ **B.** $N=0$ **C.** $0<N<2020$ **D.** $2020\leq N<4040$ **E.** 以上皆非.

Solution. $N>2020^2-2019^2+2^2-1^2=4039+3>4040$. 答案是 $\boxed{\textbf{E.}}$

Problem 7. 若 A,B,C,D 是实数使得 $\frac{6x^3+10x}{x^4+x^2+1}=\frac{Ax+B}{x^2+x+1}+\frac{Cx+D}{x^2-x+1}$ 是恒等式, 求 $A+B+3C+3D$.
A. 2 **B.** 4 **C.** 8 **D.** 16 **E.** 以上皆非.

Solution. 待定系数法

$$\begin{cases} A+C &=6\\ -A+B+C+D &=0\\ A-B+C+D &=10\\ B+D &=0\end{cases} \implies \begin{cases} A &=3\\ B &=-2\\ C &=3\\ D &=2\end{cases}.$$

所以 $A+B+3C+3D=3-2+9+6=16$, 答案是 $\boxed{\textbf{D.}}$

Problem 8. 正实数 a,b,c 满足 $abc=1$, 求 $\frac{1}{ab+a+1}+\frac{1}{bc+b+1}+\frac{1}{ca+c+1}$.
A. -1 **B.** 0 **C.** 1 **D.** 2 **E.** 以上皆非.

Solution. 注意到

$$\frac{1}{ab+a+1}=\frac{c}{1+ac+c}=\frac{bc}{b+1+bc},$$

于是

$$3=\sum_{\text{cyc}}\frac{1+a+ab}{1+a+ab}=3\sum_{\text{cyc}}\frac{1}{ab+a+1}.$$

所以答案是 $\boxed{\textbf{C.}}$

Problem 9. $(a+b+c)^3+(b-a-c)^3+(c-a-b)^3+(a-b-c)^3=$
A. $-24abc$ **B.** $-12abc$ **C.** $12abc$ **D.** $24abc$ **E.** 以上皆非.

Solution. 每一项都贡献 $6abc$, 所以答案是 $\boxed{\textbf{D.}}$

Problem 10. 试求 $f(x)=x^4-4x$ 的最小值 M, 其中 x 是任意的实数.

Solution. $f'(x)=4x^3-4=4(x^3-1)$, 所以只有一个极值点 $x=1$, 容易看出该点亦是最小值, 故 $M=f(1)=1-4=\boxed{-3.}$

Problem 11. 记 $2^{2020}\times 5^{2019}\times 9^{2018}=\cdots a_{2020}a_{2019}a_{2018}\cdots a_1a_0$ 为十进制表示, 其中数码 a_i 为 $0,1,\cdots,8,9$ 之一. 求 $a_{2020}+a_{2021}$.

Solution. $2^{2019}\times 5^{2019}$ 贡献了 2019 个 0. 我们要求 2×9^{2018} mod 1000 的余数. 因为 $\gcd(9,1000)=1, \phi(1000)=1000\times(1-\frac{1}{2})\times(1-\frac{1}{5})=400$, 所以 $2\times 9^{2018}\equiv 2\times 9^{18}\equiv 242 \mod 1000$. 答案为 $2+4=\boxed{6.}$

Remark. 硬算 $9^{18} \mod 1000$, 这是在恶心人吗?

Problem 12. (a) 设 $f(x)=x^3-3abx+a^3+b^3$, 化简 $f(-a-b)$.

(b) 因式分解 $a^3+b^3+c^3-3abc$.

Solution. (a) 答案是 $\boxed{0.}$

(b) 熟知 $\boxed{a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca).}$

Problem 13. 把 2020 写成五个 (不一定互异) 整数的立方之和.

Solution. $\boxed{2020=10^3+10^3+3^3-2^3+1^3.}$

Remark. 无脑试出来的, 我不知道这题能有什么技巧. Anyone enlighten me? 后来有人告诉我, 原来有一个结论是说:

Theorem 2 (Number is sum of five cubes)**.** *Let n be an integer. Then n can be expressed as the sum of 5 cubes (either positive or negative) in an infinite number of ways.*

Proof. See https://proofwiki.org/wiki/Number_is_Sum_of_Five_Cubes. □

Problem 14. 试求满足 $ab^3=-135$ 及 $(a+b)b=-6$ 的所有实数对 (a,b).

Solution. 我们有 $ab=-\frac{135}{b^2} \implies -6=b^2+ab=b^2-\frac{135}{b^2} \implies u^2+6u-135=0, u=b^2\neq 0$. 解得 $u=-15,9$, 答案是 $\boxed{(a,b)=(-5,3),(5,-3).}$

Problem 15. 设 $M(b,c)$ 为函数 $|2x^2+bx+c|$ 在闭区间 $[0,2]$ 上的最大值. 试求 $M(b,c)$ 的最小值 m, 其中 b,c 走遍所有实数.

Solution. $|2x^2+bx+c|=|2(x+\frac{b}{4})^2+c-\frac{b^2}{8}|$. 我们有

$$\max\{|A|,|B|\}\geq \frac{1}{2}|A-B|. \tag{2}$$

当 $b>0$ 或 $b<-8$ 时, $M(b,c)=\max\{|c|,|8+2b+c|\}$, 由 eq. (2) 知此时 $M(b,c)\geq\frac{1}{2}|8+2b|>4$. 当 $-4\leq b\leq 0$ 时, $M(b,c)=\max\{|8+2b+c|,|c-\frac{b^2}{8}|\}$, 由 eq. (2) 知此时 $M(b,c)\geq\frac{1}{2}\cdot|\frac{1}{8}(b+8)^2|\geq 1$. 当 $-8\leq b\leq -4$ 时, $M(b,c)=\max\{|c|,|c-\frac{b^2}{8}|\}$, 由 eq. (2) 知此时 $M(b,c)\geq\frac{1}{2}\cdot|\frac{b^2}{8}|\geq 1$. 显然当 $(b,c)=(-4,1)$ 时 $M(b,c)=1$, 所以答案是 $\boxed{m=1.}$

Problem 16. 令 $f(n)=\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots+\frac{1}{2020^n}$, 求 $f(2)+f(3)+f(4)+\cdots$ 的值 S.

Solution. 我们有

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=2}^{2020} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{k^n} = \sum_{k=2}^{2020} \frac{\frac{1}{k^2}}{1-\frac{1}{k}} \\ &= \sum_{k=2}^{2020} \frac{1}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{2020} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{2020} \\ &= \boxed{\frac{2019}{2020}.} \end{aligned}$$

References

[1] Derangement, 错排公式. https://en.wikipedia.org/wiki/Derangement.

[2] Pham Kim Hung. S.O.S Theorem. https://artofproblemsolving.com/community/c6h80127.