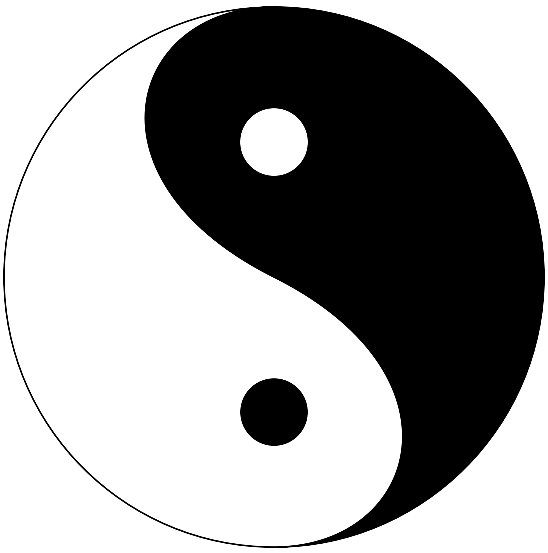
2019 年校际数学比赛参考解答

Complex2-老爹

contact@complex2math.com



May, 2019

There is more than one way to skin a cat.

Contents

0. Preface 1

1. Problem 1 2

2. Problem 2 2

3. Problem 3 2

4. Problem 4 2

5. Problem 5 2

6. Problem 6 3

7. Problem 7 4

8. Problem 8 4

9. Problem 9 4

10. Problem 10 4

11. Problem 11 5

12. Problem 12 5

13. Problem 13 5

14. Problem 14 6

15. Problem 15 6

Preface

试卷共有 15 道题, 其中 1-4 题是选择题, 每题 4 分; 5-8 题是填空题, 每题 7 分, 只需填写答案不需写过程; 9-15 题是证明题, 每题 15 分, 需要给出完整的计算或证明.

Please check https://complex2math.com/blog/macmo-2019-release/ for any update.

Problem 1. $\frac{109}{9990}$ 的循环小数表示是

A. $0.\dot{1}0\dot{9}$ **B.** $0.\dot{0}1\dot{9}$ **C.** $0.\dot{0}10\dot{9}$ **D.** $0.0\dot{1}0\dot{9}$ **E.** 以上皆非.

Solution. 答案是 $\boxed{\text{D.}}$ 我们有 $\frac{109}{9990} = \frac{1}{10} \times \frac{109}{999}$, 显然 $\frac{109}{999} = 0.\dot{1}0\dot{9}$.

Problem 2. 设 N 为满足方程 $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$ 的有序三元正整数组 (x_1, x_2, x_3) 的个数, 则 $N =$

A. 1 **B.** 3 **C.** 5 **D.** 7 **E.** 以上皆非.

Solution. 答案是 $\boxed{\text{E.}}$ 不妨设 $x_1 \le x_2 \le x_3$, 我们有 $1 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \le \frac{3}{x_1}$, 所以 $x_1 \le 3$. 若 $x_1 = 3$, 只能是 $(x_1, x_2, x_3) = (3, 3, 3)$. 若 $x_1 = 2$, 则 $\frac{1}{2} = \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} \le \frac{2}{x_2}$, 所以 $x_2 \le 4$. 若 $x_2 = 4$, 只能是 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 4, 4)$, 若 $x_2 = 3$, 只能是 $(x_1, x_2, x_3) = (2, 3, 6)$. 所以一共有 $1 + 3 + 3! = 10$ 个有序三元组.

Problem 3. 在所有小于 1 的正有理数之中, 记 S 为约简后分母是 2019 的分数之和, 则 $S =$

A. 1 **B.** 3 **C.** 673 **D.** 2019 **E.** 以上皆非.

Solution. 答案是 $\boxed{\text{E.}}$ 注意到 $2019 = 3 \times 673$, 我们有

$$\begin{aligned} S &= \sum_{k=1}^{2019} \frac{k}{2019} - \sum_{k=1}^{2019/3} \frac{3k}{2019} - \sum_{k=1}^{2019/673} \frac{673k}{2019} + \sum_{k=1}^{2019/2019} \frac{2019k}{2019} \\ &= 1010 - 337 - 2 + 1 \\ &= 672. \end{aligned}$$

Problem 4. n 对夫妻参加同一聚会, 每个男士与每一个人都握手 (但不包括自己的妻子), 女士之间不会握手. 聚会中共有 S 次握手, 则 $S =$

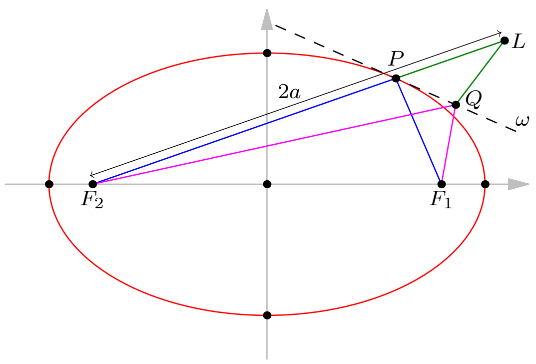
A. $\frac{n(n-1)}{6}$ **B.** $\frac{n(n-1)}{5}$ **C.** $\frac{n(n-1)}{4}$ **D.** $\frac{n(n-1)}{3}$ **E.** 以上皆非.

Solution. 答案是 $\boxed{\text{E.}}$ 把问题归结为一个图, 由握手引理即知 $S = ((2n-2)n + (n-1)n)/2 = \frac{3n(n-1)}{2}$.

Problem 5. 设 $A(0, 4), B(2, 2)$ 为椭圆 $E : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ 内的两点, M 为椭圆 E 上的任一点. 记 m 为 $|AM| + |MB|$ 的最小值, 则 $m =$

Solution. 我们先证明下述引理:

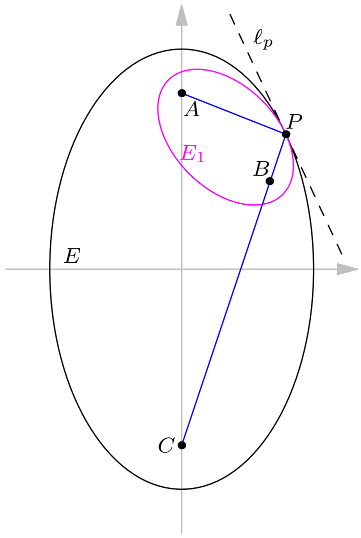
Lemma 1. 设 F_1, F_2 为椭圆 E 的两个焦点, P 是椭圆上一点, 直线 ℓ_P 是过点 P 与椭圆相切的直线, 则 ℓ_P 是 $\angle F_1 P F_2$ 的外角平分线.



Proof. 如图, 延长直线 F_2P 至 L, 使得 $|PL| = |PF_1|$, 设 ω 是 $\angle F_1PF_2$ 的外角平分线, 我们只需证明对于直线 ω 上任意一点 $Q \neq P$, 点 Q 不在椭圆 E 上. 事实上, 此时 ω 是 F_1L 的中垂线, 由三角不等式我们有

$$2a = |LF_2| < |QF_2| + |QL| = |QF_2| + |QF_1|.$$

所以 $\ell_P = \omega$. ■



回到原题, 注意到点 A 是椭圆 E 的一个焦点, 设另一个焦点为 $C(0, -4)$. 对固定的常数 $m \in \mathbb{R}$, 平面上使得 $|AM| + |MB| = m$ 的点 M 的轨迹是一个以 A, B 为焦点的椭圆 E_1. 由 m 的最小性, E_1 与 E 相切, 设切点为 P, 则 P 就是满足 $|AM| + |MB|$ 最小的那个点 M. 设过点 P 且与 E 相切的直线为 ℓ_P, 注意到 ℓ_P 也是椭圆 E_1 的切线 (因为 $E_1 \setminus P$ 完全包含在椭圆 E 内), 由 lem 1 知 ℓ_P 是 $\angle APC$ 和 $\angle APB$ 的外角平分线, 所以只能是 P, B, C 三点共线, 于是

$$m = |AP| + |PB| = |AP| + |PC| - |CB| = 10 - 2\sqrt{10}.$$

所以答案是 $\boxed{10 - 2\sqrt{10}.}$

Remark. 直接代入椭圆的参数方程 $x = 3\cos\theta, t = 5\sin\theta$, 则可将 m 划归成关于 θ 的函数. 问题转化为计算这个关于 θ 的函数的最小值, 也许真的能暴力算出来但不切实际. 这里注意到 A 是一个焦点是一个很重要的观察.

Problem 6. 满足 $P(x)^2 - 1 \equiv 4P(x^2 - 4x + 1)$ 的实系数多项式 $P(x)$ 是

Solution. 答案是 $\boxed{P(x) \equiv 2 \pm \sqrt{5}.}$ 若 $\deg P = 0$, 则容易解得此时 $P(x) \equiv 2 \pm \sqrt{5}$. 下面假设 $\deg P \geq 1$, 设 $Q(t) = P(t + 2)$, 我们有 $Q(t - 2)^2 - 1 = 4Q(t^2 - 4t - 1)$, 再令 $x = t - 2$, 得

$$Q(x)^2 - 1 = 4Q(x^2 - 5). \tag{1}$$

容易看出 $Q(x)$ 的首项系数是 4. 对上式求导得

$$Q(x)Q'(x) = 4Q'(x^2 - 5)x. \tag{2}$$

设 $a_1 = 0, a_n = \sqrt{5 + a_{n-1}}$ 对于 $n \geq 2$.

Claim. 所有的 a_n 都不是 $Q(x)$ 的零点.

反证法, 假如存在 a_n 使得 $Q(a_n)=0$, 反复代入 eq. (1) 得 $-1<Q(a_{n-1})=-\frac{1}{4}<0$, $-1<Q(a_{n-2})=\frac{1}{4}(Q(a_{n-1})^2-1)<0$, 以此类推得 $-1<Q(a_1)=Q(0)<0$. 于是 $-1<Q(-5)=\frac{1}{4}(Q(0)^2-1)<0$, $-1<Q(20)=\frac{1}{4}(Q(-5)^2-1)<0, -1<Q(20^2-5)<0$, 这与 $\lim_{n\to\infty}Q(n)=\infty$ 矛盾. 特别的, 以上讨论告诉我们 $Q(0)\neq 0$.

在 eq. (2) 中令 $x=0$, 得 $Q'(a_1)=0$, 在 eq. (2) 中令 $x=a_n$, 得 $Q(a_n)Q'(a_n)=4Q'(a_{n-1})a_n$, it follows by induction on n that $Q'(a_n)=0$ 对所有的 $n=1,2,\cdots$ 成立, 这与多项式只有有限个零点矛盾.

Problem 7. 已知正实数 x,y 满足 $x^3+y^3\leq 2$, 记 M 为 $x+y$ 的最大值, 则 $M=$

Solution. 答案是 $\boxed{2.}$ 直接由 Hölder 不等式得

$$8\geq(1+1)(1+1)(x^3+y^3)\geq(x+y)^3=M^3.$$

Problem 8. 列出满足以下方程的所有正整数对 (x,y) : $(x,y)=$

$$x^{2^x}=y^{512^y}.$$

Solution. 答案是 $\boxed{(1,1),(16,2).}$ 方程等价于

$$x^{2^x}=y^{2^{9y}}.$$

于是 (x,y) 必须满足 $2^x<2^{9y}$ 且 $9y>x>y$. 若 $(x,y)\neq(1,1)$, 设 $p^n||x, p^m||y$, 其中 p 素, 我们有 $n\cdot 2^x=m\cdot 2^{9y}\implies\frac{n}{m}=\frac{2^{9y}}{2^x}=: t$ which is a fixed value for all p such that $p\mid x,y$. 因此 $x=y^t$ where t is a power of 2, 从 $9y>x=y^t$ 推出 $t=2$ 或 $t=4$. 当 $t=2$ 时, 从 $t=2^{9y-y^t}$ 得 $9y-y^2=1$, 方程无正整数解. 当 $t=4$ 时, 要求 $9y-y^4=2$, 方程有唯一正整数解 $y=2$, 此时 $x=16$.

Problem 9. 试求最小的正整数 n, 使得在任意 n 个不同的整数中必存在 3 个 $a<b<c$ 且 $3\mid(ab+bc+ca)$.

Solution. 答案是 $\boxed{6.}$ 用 x_0,x_1,x_2 分别表示 n 个不同的整数里模 3 余 $0,1,2$ 的个数. 若 $x_0\geq 2$, 则取其中两个数为 3 的倍数, 剩下一个数任取即可. 如果 $x_1\geq 3$ 或 $x_2\geq 3$, 则取 a,b,c 使得它们模 3 同余即可. 当 $n\geq 6$ 时, $x_0\geq 2, x_1\geq 3, x_2\geq 3$ 三者当中必有之一成立.

当 $n=5$ 时, 考虑 $A=\{0,1,2,4,5\}$, 容易验证 A 中任意 3 个数 $a<b<c$ 都不满足 $3\mid(ab+bc+ca)$.

Problem 10. 定义数列 $(u_n)_{n\geq 1}$: $u_1=4$ 及对任意 $n\geq 1$ 有 $u_{n+1}=2u_n+\sqrt{3u_n^2+1}$. 求: $S_n=u_{n+2}-4u_{n+1}+u_n$ 当 $n\geq 1$.

Solution. 答案是 $\boxed{S_n\equiv 0.}$ 我们有

$$u_{n+1}^2-4u_{n+1}u_n+u_n^2=1. \tag{3}$$

和

$$u_{n+2}^2-4u_{n+2}u_{n+1}+u_{n+1}^2=1. \tag{4}$$

从 eq. (3) 和 eq. (4) 立得 u_{n+2},u_n 为方程 $x^2-4u_{n+1}x+u_{n+1}^2-1=0$ 的两根, 所以 $u_{n+2}+u_n=4u_{n+1}$.

Problem 11. 确定正整数 S 的个位数, 并说明理由.

$$S=(2+\sqrt{3})^{2019}+(2-\sqrt{3})^{2019}.$$

Solution. 答案是 $\boxed{2.}$ 设 $x=2+\sqrt{3}, y=2-\sqrt{3}$, 则 $x+y=4, xy=1$,

$$h_n:=x^n+y^n=(x^{n-1}+y^{n-1})(x+y)-xy(x^{n-2}+y^{n-2})=4h_{n-1}-h_{n-2},$$

其中 $h_1=4, h_2=(x+y)^2-2xy=14$. 令 $a_n=h_n \bmod 10$, 我们有 $a_1=4, a_2=4, a_3=2$, $a_4=4, a_5=4, a_6=2, \cdots$. 可见 $(a_n)_{n\geq 1}$ 以 3 为周期, $a_{2019}=a_3=2$.

Problem 12. 确定所有正整数 n, 使得 $S_n=2^8+2^n$ 是完全平方数, 并说明理由.

Solution. 答案是 $\boxed{n=11.}$ 我们有 $v_2(S_n)=\min(8,n)$, 所以当 $n<8$ 时必为偶数, 此时 $n=2k, S_n=2^{2k}(1+2^{8-2k})$, $k=1,2,3$, 显然这些 S_n 都不是完全平方数, 下设 $n\geq 8$. 我们有 $S_n=2^8(1+2^{n-8})$ 为完全平方数当且仅当 $1+2^{n-8}=1+2^m (m=n-8)$ 为完全平方数. 设 $t^2=1+2^m$, 则 $2^m=(t+1)(t-1)$, 要使 $t+1, t-1$ 都为 2 的方幂, 只能是 $t=3$, 此时 $n=11$.

Problem 13. 如图 $\odot O$ 是 $\triangle ABC$ 的旁切圆, 切点为 D, E, F. 若 R 是 $\odot O$ 的半径, 求证:

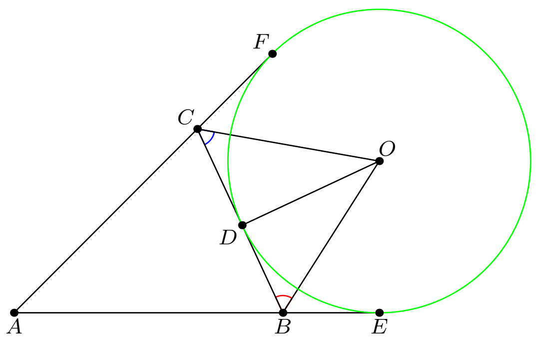
$$\frac{2R}{BC}\leq \frac{1+\sin(\angle A/2)}{\cos(\angle A/2)}.$$

Solution. 我们只需证

$$\frac{BC}{2R}\geq \frac{\cos(\angle A/2)}{1+\sin(\angle A/2)}.$$

注意到我们有

$$\frac{BC}{2R}=\frac{BD}{2OD}+\frac{CD}{2OD}=\frac{1}{2}(\tan(\angle B/2)+\tan(\angle C/2))=\frac{1}{2}\frac{\sin(\angle B/2+\angle C/2)}{\cos(\angle B/2)\cos(\angle C/2)},$$



以及, 因为 $\frac{1}{2}(\angle A+\angle B+\angle C)=90°$, 所以

$$\frac{\cos(\angle A/2)}{1+\sin(\angle A/2)}=\frac{\sin(\angle B/2+\angle C/2)}{1+\cos(\angle B/2+\angle C/2)}.$$

所以只需证

$$1+\cos(\angle B/2+\angle C/2)\geq 2\cos(\angle B/2)\cos(\angle C/2).$$

化简上式得 $1\geq \cos(\angle B/2)\cos(\angle C/2)+\sin(\angle B/2)\sin(\angle C/2)=\cos(\angle B/2-\angle C/2)$.

Problem 14. 已知平面上的 2019 个点分别染为红色或蓝色, 使得以任一蓝点为中心的单位圆周上恰有两个红点. 试求蓝点个数的最大值, 并说明理由.

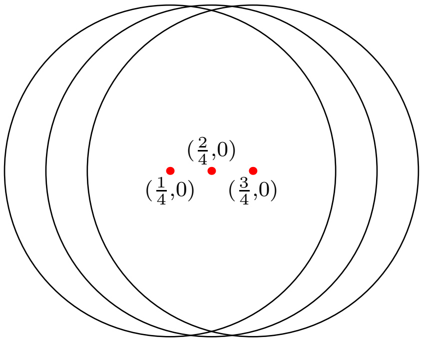
Solution. 答案是 $\boxed{1974.}$ 显然红点个数至少有两个, 任取两个红点 r_i, r_j, 分别作为中心作单位圆 C_i, C_j, 如果 C_i, C_j 有交点, 且交点是蓝点 b_k, b_l, 定义 $f(c_i, c_j) = \{b_k, b_l\}$ (可以是 $k = l$), 否则定义 $f(c_i, c_j) = \varnothing$. 设

$$X := \{(c_i, c_j) : c_i, c_j \text{ 是红点且 } i < j\}.$$

在题目的假定下, 当 $(i,j) \neq (s,t)$ 时, $f(c_i, c_j) \cap f(c_s, c_t) = \varnothing$, 所以 f 是 X 上的单射, 于是 f 的 image 包含至多 $2 \times \binom{m}{2} = m(m-1)$ 个不同的蓝点, 其中 $m =$ 红点个数. 所以我们得到不等式约束

$$m(m-1) \geq 2019 - m \implies m \geq 45.$$

即蓝点个数至多为 $2019 - 45 = 1974$. 蓝点个数达到 1974 的构造如下:



只需让 45 个红点均匀的等分在 x 轴上的 $(0,1)$ 区间里, 就能保证这 45 个单位圆相交得到 $45 \times 44 = 1980$ 个不同的点.

Problem 15. 把 $1, 2, \cdots, 120, 121$ 分成 11 组, 每组恰有 11 个数, 每个数不能重复, 使得各组中的数之和都相等, 能否办成? 若能办成请在下列表格填写一个具体分组; 否则说明理由.

Solution. 答案是 $\boxed{\text{能办成.}}$ 注意到 $1+2=3, 4+5=9, 6+7=13, 10+11=21, 14+15=29$. 令 $x = 61$ 为均值, 我们有如下分组方法:

$$\begin{aligned}
&\{x \pm i : i = 0, 60, 59, 58, 57, 56\} \\
&\{x+14, x+15, x-29\} \cup \{x \pm i : i = 55, 54, 53, 52\} \\
&\{x-14, x-15, x+29\} \cup \{x \pm i : i = 51, 50, 49, 48\} \\
&\{x+10, x+11, x-21\} \cup \{x \pm i : i = 47, 46, 45, 44\} \\
&\{x-10, x-11, x+21\} \cup \{x \pm i : i = 43, 42, 41, 40\} \\
&\{x+6, x+7, x-13\} \cup \{x \pm i : i = 39, 38, 37, 36\} \\
&\{x-6, x-7, x+13\} \cup \{x \pm i : i = 35, 34, 33, 32\} \\
&\{x+4, x+5, x-9\} \cup \{x \pm i : i = 31, 30, 28, 27\} \\
&\{x-4, x-5, x+9\} \cup \{x \pm i : i = 26, 25, 24, 23\} \\
&\{x+1, x+2, x-3\} \cup \{x \pm i : i = 22, 20, 19, 18\} \\
&\{x-1, x-2, x+3\} \cup \{x \pm i : i = 17, 16, 12, 8\}
\end{aligned}$$