2018 年校际数学比赛参考解答

Complex2-老爹

contact@complex2math.com

July, 2018

There is more than one way to skin a cat.

Contents

Preface

第一轮共有 11 道题, 其中题 1-6 是填空题, 每题 6 分, 其余 5 题是证明题, 每题 12 分. 第二轮再考 5 题证明.

Please check https://complex2math.com/blog/macmo-2018-release/ for any update.

Problem 1. 设 a, b 为正实数, 已知抛物线 $y = x^2 - a$ 与 $x = y^2 - b$ 交于四个互异的点 $P_i(x_i, y_i)(i = 1, 2, 3, 4)$. 试确定 $(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4)$ 的值.

Solution. 答案是 $\boxed{1.}$ 将 $y = x^2 - a$ 代入得 $x^4 - 2ax^2 - x + a^2 - b = 0$. 于是利用根与系数的关系, 我们有

$$\begin{aligned}(x_1 + x_2)(x_1 + x_3)(x_1 + x_4) &= x_1^2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_1x_2x_3 + x_1x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 \\ &= x_1^2 \times 0 + 1 = 1.\end{aligned}$$

Problem 2. 试求方程 $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$ 的通解 x.

Solution. 答案是 $\boxed{x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.}$ 利用 Hölder 不等式关系我们有

$$(\sin^6 x + \cos^6 x)(1 + 1)(1 + 1) \geq (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 = 1.$$

等号成立 $\iff \sin^6 x = \cos^6 x \iff x = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$, 其中 $k \in \mathbb{Z}$.

Problem 3. 试求方程 $x(x^2 + x + 1) = -\frac{1}{3}$ 的所有实数解 x.

居然考三次方程的求根, 有点意思. 这里我们介绍一下 general 的三次方程求根理论, 下面的内容选自 [2].

Definition 1 (depressed cubic form)**.** Cubics of the form

$$t^3 + pt + q$$

are said to be **depressed**.

Lemma 2. *Let $F = ax^3 + bx^2 + cx + d$ be an arbitrary cubic form, then we can perform a change of variable after which F become depressed. Moreover, this change of variable is linear in x.*

Proof. $x = t - \frac{b}{3a}$ works. □

Definition 3 (Discriminant)**.** 设 $f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ 为一个首一的多项式. 在 $\mathbb{C}$ 中 $f(x)$ 分解为一次因式的乘积[1]

$$f(x) = (x - r_1) \cdots (x - r_n).$$

Then the **discriminant** of $f(x)$ is defined to be

$$\operatorname{disc}(f) := \prod_{i<j}(r_i - r_j)^2.$$

Lemma 4. *The discriminant of depressed cubic form $t^3 + pt + q$ is $-(4p^3 + 27q^2)$.*

Proof. 根据 Vieta's formulas $r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1 = p, r_1r_2r_3 = -q$. 直接验证

$$(r_1 - r_2)^2(r_2 - r_3)^2(r_3 - r_1)^2 = -4(r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1)^3 - 27(r_1r_2r_3)^2.$$

□

[1] 代数基本定理, 这个事实会在复变函数以及拓扑课程中给出证明

Proposition 5. *如果 $f(t) = t^3 + pt + q$ 是实系数多项式, 并且它的 discriminant $\operatorname{disc}(f) \neq 0$ (这相当于说 $f(t)$ 无重根), 则*

(a) $\operatorname{disc}(f) > 0 \implies f(t)$ *有三个不同的实根.*

(b) $\operatorname{disc}(f) < 0 \implies f(t)$ *有一个实根和两个互相共轭的复根.*

Proof. 注意复根必然成对出现. 若 r_2, r_3 是共轭的复根, 则 $r_2 - r_3$ 是纯虚数, $r_1 - r_2, r_1 - r_3$ 是一对共轭的复数, 于是 $(r_2 - r_3)^2$ 是负实数, $(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$ 是正实数 (正是 $r_1 - r_2$ 这个复数的 norm 的平方). 所以此时 $\operatorname{disc}(f) < 0$. □

Proposition 6 (Vieta's substitution)**.** *The substitution $t = y - \frac{p}{3y}$ transforms the depressed cubic into*

$$y^3 + q - \frac{p^3}{27y^3} = 0.$$

Multiplying by y^3, one gets a quadratic equation in $z := y^3$

$$z^2 + qz - \frac{p^3}{27} = 0.$$

Solution. 原方程为 $x^3 + x^2 + x + \frac{1}{3} = 0$, 代入 $x = t - \frac{1}{3}$ 得到 depressed form $t^3 + \frac{2}{3}t + \frac{2}{27} = 0$. 再使用 Vieta's substitution $t = y - \frac{2}{9y}$ 得到 $y^3 + \frac{2}{27} - \frac{8}{729y^3} = 0$. 最后再令 $z = y^3$, 我们有 $z^2 + \frac{2}{27}z - \frac{8}{729} = 0$, 解得 $z = \frac{2}{27}$ or $-\frac{4}{27}$, 还原回去便有

$$t = \frac{2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}}{3} \implies x = \boxed{\frac{1}{3}(-1 + 2^{\frac{1}{3}} - 2^{\frac{2}{3}}).}$$

事实上, 从 depressed form 的 discriminant 我们也可以知道只有一个实根 (c.f. prop 5).

Problem 4. 试确定正整数 a 使得 $a^2 - 3a - 19$ 是 289 的倍数.

Solution. 答案是 $\boxed{\text{不存在.}}$ 注意到 $289 = 17 \times 17$, 我们有

$$a^2 - 3a - 19 \equiv a^2 - 3a - 17a - 19 + 17 \times 7 = (a - 10)^2 \pmod{17}. \tag{1}$$

由此知 $a = 10 + 17k, k \in \mathbb{Z}$. 代入原式得 $289k^2 + 289k + 51 \equiv 0 \pmod{289}$, 这样的 k 显然不存在.

Problem 5. 设 $x, y \in \mathbb{R}_+$, 问: $A = (x + y)^5$ 和 $B = 12xy(x^3 + y^3)$ 哪个较大?

Solution. 答案是 $\boxed{A.}$ 注意到 $B = 12xy(x + y)(x^2 + y^2 - xy)$, 因为 x, y 都是正的, 所以我们只需证明 $(x + y)^4 \geq 12xy(x^2 + y^2 - xy)$. 令 $a = x + y, b = xy$, 我们只需证明

$$a^4 - 12ba^2 + 36b^2 \geq 0.$$

这由 AM-GM 不等式显然.

Problem 6. 已知 y_1, y_2, y_3 为方程 $y^3 + py + q = 0$ 的互异复数根. 令 $\alpha = e^{\frac{2\pi i}{3}} = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$. 定义 $u = y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3$ 及 $v = y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3$. 试用 p, q 来表示 $uv, u^3 + v^3$.

Solution. 答案是 $\boxed{uv=-3p, u+v=-27q.}$ 利用三次单位根的性质: $\alpha^3=1$ 和 $\alpha^2+\alpha+1=0$, 我们有

$$\begin{aligned} u+v &= 2y_1-y_2-y_3 \\ uv &= y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_1y_2-y_1y_3-y_2y_3 \\ u^3+v^3 &= 2(y_1^3+y_2^3+y_3^3)-3\sum_{\text{sym}} y_1^2y_2+12y_1y_2y_3. \end{aligned}$$

再利用根与系数的关系:

$$y_1+y_2+y_3=0, \quad y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3=p, \quad y_1y_2y_3=-q,$$

即得

$$uv=(y_1+y_2+y_3)^2-3(y_1y_2+y_1y_3+y_2y_3)=-3p.$$

我们有

$$u^3+v^3=2(y_1+y_2+y_3)^3-9\sum_{\text{sym}} y_1^2y_2=-9\sum_{\text{sym}} y_1^2y_2.$$

另一方面, 我们有

$$0=(y_1+y_2+y_3)(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1)=\sum_{\text{sym}} y_1^2y_2+3y_1y_2y_3 \implies -9\sum_{\text{sym}} y_1^2y_2=-27q.$$

Problem 7. 设 I 为等腰三角形 ABC 的内心且 $AB=AC$. 若 $BC=AC+AI$, 试求 $\triangle ABC$ 的三个内角并给出证明.

Solution. 答案是 $\boxed{\angle B=45^\circ, \angle C=45^\circ, \angle A=90^\circ.}$ 不妨设 $B=(-1,0), C=(1,0), A=(0,a)$, 在题目的条件下我们有

$$2=\sqrt{a^2+1}+a\times\frac{\sqrt{a^2+1}}{\sqrt{a^2+1}+1} \iff (a-1)(a+1+\sqrt{a^2+1})=0.$$

只能是 $a=1$.

Problem 8. 圆 $\odot O$ 的圆心为 O, 设 A,B 为 $\odot O$ 外侧的两点. 试确定圆 $\odot O$ 的点 M 使得 MA^2+MB^2 到达最小值. [2]

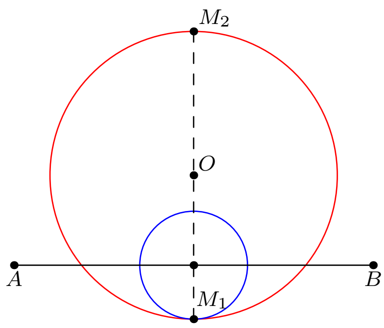
Solution. 先分析使得 $MA^2+MB^2=a$ 的点 M 的轨迹是什么. 取线段 AB 的中点为原点, 不妨设 $A=(-1,0), B=(1,0), M=(x,y)$ 我们有

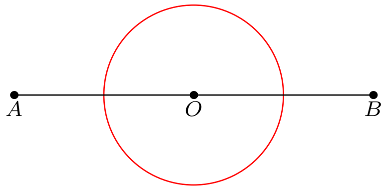
$$a=MA^2+MB^2=(x-1)^2+y^2+(x+1)^2+y^2=2x^2+2y^2+2.$$

容易看出, 这样的轨迹是一个以 AB 中点为圆心, 半径为 r 的圆 ω_r. 存在 r_0 使得 ω_{r_0} 恰好与圆 $\odot O$ 相切, 点 M 就是这个切点. 我们的结论可以总结如下: 设 AB 的中点为 N.

- 如果 $N=O$, 则 M 是圆 $\odot O$ 上任意一点.
- 如果 $N\neq O$, 作直线 NO 与圆 $\odot O$ 交于两点 M_1, M_2, 其中与 N 距离较近的一点就是我们要寻找的点 M.

[2]所谓外侧指 A,B 都在圆的外部, 圆 $\odot O$ 的点 M 指 M 在圆上.





图片的示例中红圆和蓝圆内切 (这是因为 A, B 在两侧), 也有可能是外切 (此时 A, B 在同侧).

Problem 9. On a 5×5 board, A and B take turns in marking squares. A starts first. A always marks an X in an empty square, and then B always marks O in another empty square. No square can be marked twice. A wins if A can make one full row, column or diagonal consisting of only X's. Can B prevent A from winning? Give a proof. [3]

Solution. 答案是 $\boxed{\text{B 能阻止 A 胜利.}}$ 考虑下表: 注意到, 对于任意一行, 或一列, 或一条对角线上, 都存在两个不同的方格, 他们被标记为相同的数字. 每当 A 选择在标记为 j 的方格上标记 X 时, B 就在另一个同样标记为 j 的方格上标记 O, 这样, B 便可阻止 A 胜利.

5	9	11	9	6
7	1	1	4	8
12	2	0	4	12
7	2	3	3	8
6	10	11	10	5

Table 1: B 的应对策略

Problem 10. 设在图 G 中各顶点的度至少是 $\delta > 0$, 求证: 存在一条路径长度至少为 $\delta + 1$.
注: 我们不会定义图, 顶点, 度及路径. [4]

Solution. 假设图中最长路径为 $v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_m$. 由于这条路径已经是最长的路径了, 所以集合 $N = \{v \in G : v \text{ 与 } v_m \text{ 相邻}\}$ 必须是 $\{v_1, v_2, \cdots, v_{m-1}\}$ 的子集, 因此 $m - 1 \geq |N| \geq \delta$.

Remark. Optimal assumption, 一开始就取最优的选择, 然后分析最优的选择会具有怎样的性质.

[3] 在中文版试题中, A 胜利的条件是 (在某一行或一列或一条对角线上) 出现连续的四个 X. 这显然是翻译错误.
[4] 意思就是说题目不会告诉你图, 顶点, 度及路径的定义. 如果你对图论没有任何了解, 这题就可以直接拉闸了.

Problem 11. 是否存在正数数列 $(a_n)_{n\geq 1}$ 使得对任意的正整数 n 以下两个不等式 (i) 及 (ii) 都成立? 并给出证明.

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{n} a_i \leq n^2 \qquad \text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i} \leq 2018.$$

Solution. 答案是 $\boxed{\text{不存在.}}$ 我们先证明

Lemma 7 (Cauchy 收敛原理)**.** *存在充分大的 N, 使得对 $n \geq N$ 都有*

$$\frac{1}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{2n}} < \frac{1}{4}.$$

Proof. 假设结论不真, 则我们可以找到 $1 = n_1 < 2n_1 < n_2 < 2n_2 < n_3 < \cdots$ 使得对任意 $k \in \mathbb{N}$ 有

$$S_k = \frac{1}{a_{n_k+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{2n_k}} \geq \frac{1}{4}.$$

这推出

$$2018 \geq \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_{n_{8073}}} \geq S_1 + \cdots + S_{8073} \geq \frac{1}{4} \times 8073 > 2018,$$

与条件 (ii) 矛盾. ∎

回到原题, 利用 Cauchy 不等式我们有

$$\frac{1}{4}(a_1 + \cdots + a_{2n}) > (a_{n+1} + \cdots + a_{2n}) \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a_{2n}} \right) \geq n^2.$$

这与 $\sum_{i=1}^{2n} a_i \leq 4n^2$ 矛盾.

Remark. 本题源自 Balkan Mathematical Olympiad 2008 Problem 2 (c.f. [1]), 我曾经做过, 具有数学分析的味道. 事实上, 如果你学过最基本的数学分析, 条件 (ii) 即级数收敛, 第一时间就能反应过来使用 Cauchy 收敛原理把 $\frac{1}{a_{n+1}} + \cdots + \frac{1}{a_m}, m > n$ 给 bound 住, 剩下的事情也是水到渠成.

Problem 12. 试写出一个五位正整数 n, 使得其各位数字和是最小, 且 $2556 \mid n^3 - 1$.

Solution. 我们有 $2556 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 71$. 容易验证 $4 \mid n^3 - 1 \iff n \equiv 1 \pmod 4$, 利用 LTE 引理我们有 $v_3(n^3 - 1) = v_3(n-1) + 1, v_{71}(n^3 - 1) = v_{71}(n-1)$, 这推出

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod 4 \\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n \equiv 1 \pmod{71} \end{cases}.$$

设 $n = a_0 + 10a_1 + 100a_2 + 1000a_3 + 10000a_4, a_4 \geq 1$. 代入上式得到

$$a_0 + 2a_1 - 1 \equiv 0 \pmod 4 \tag{2}$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 - 1 \equiv 0 \pmod 3 \tag{3}$$
$$a_0 + 10a_1 + 29a_2 + 6a_3 + 60a_4 - 1 \equiv 0 \pmod{71}. \tag{4}$$

由 eq. (3) 知 n 的数字和至少为 4.

Claim. n 的数字和不可能为 4.

Proof. 如果 n 的数字和为 4, 我们有如下三种情形:

Case 1: $a_4 = 3$, 此时根据 eq. (2) 知只能是 $a_0 = 1$, 代入 eq. (4) 去验证发现这不符合要求.

Case 2: $a_4 = 2$, 此时根据 eq. (2) 知只能是 $a_0 = 1, a_1 = 0$, 容易验证无论 a_2, a_3 哪个等于 1 都不符合要求.

Case 3: $a_4 = 1$, 此时根据 eq. (2) 知要么 $a_0 = 1, a_1 = 0$; 要么 $a_0 = 1, a_1 = 2$. 后者代入 eq. (4) 去验证得 $80 \equiv 1 \pmod{71}$ 显然不符合要求. 前者的话无论 $(a_2, a_3) = (2,0), (1,1), (0,2)$ 都不符合要求.

■

于是 n 的数字和至少为 7, 现在取 $n = \boxed{21301}$, 容易验证这个 n 确实符合题目要求.

Problem 13. 求所有的实系数多项式 $P(x)$, 使得 $(x+1)P(x-1) - (x-1)P(x)$ 恒为常数.

Solution. 令 $x = 1$ 就知道这个常数为 $2P(0)$, 不妨设 $P(0) = 0$ (否则我们可以用 $P(x) - P(0)$ 作为新的 $P(x)$). 则 0 是 P 的根, $P(x) = xQ(x)$, 代入原式得

$$(x-1)((x+1)Q(x-1) - xQ(x)) \equiv 0,$$

this implies that

$$(x+1)Q(x-1) = xQ(x) \quad \text{for all } x \neq 1.$$

在上式中令 $x = 0$ 得到 $Q(-1) = 0$, 即 $(x+1)$ 是 Q 的因式. 设 $Q(x) = (x+1)R(x)$, 我们有

$$(x+1) \cdot x \cdot R(x-1) = x(x+1)R(x) \quad \text{for all } x \neq 1.$$

这推出 $R(1) = R(2) = R(3) = \cdots$, 从而只能是 $R(x) = a$ 为一常数, 于是 $P(x) = a(x+1)x + b$, 其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 任意.

Problem 14. 已知 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为正实数, 且满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1$. 试求以下式子的最小值:

$$\frac{a_1^3}{a_1^2 + a_2a_3} + \frac{a_2^3}{a_2^2 + a_3a_4} + \cdots + \frac{a_{n-1}^3}{a_{n-1}^2 + a_na_1} + \frac{a_n^3}{a_n^2 + a_1a_2}.$$

Solution. 记表达式为 S, 令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = \frac{1}{n}$ 得到 $S = \frac{1}{2}$, 下面我们证明 $S \geq \boxed{\frac{1}{2}.}$ 只需要利用 AM-GM 不等式,

$$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^3}{a_i^2 + a_{i+1}a_{i+2}} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i - \frac{a_ia_{i+1}a_{i+2}}{a_i^2 + a_{i+1}a_{i+2}} \right) \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{a_{i+1}a_{i+2}}}{2} \geq 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{a_{i+1} + a_{i+2}}{4} = \frac{1}{2}.$$

Problem 15. 某班有 7 名男生和 13 名女生, 在三个月之内每名男生至少要与每名女生交流一次. 证明: 存在两名男生与两名女生, 这两名男生在同一个月内与这两名女生有过交流.

Solution. 考虑一个二部图 $G \times B$. 其中 $G = \{g_1, \cdots, g_{13}\}, B = \{b_1, \cdots, b_7\}$ 分别代表女生和男生. 如果男生 b_i 与女生 g_j 在第 k 月有一次交流, 我们就用一条颜色为 k 的边连接 b_i, g_j. 由于一共有 13×7 条边, 且一共只有 3 种颜色, 根据抽屉原理, 存在一种颜色的边的集合 E, 使得 $|E| \geq \lceil \frac{13 \times 7}{3} \rceil = 31$. 现在我们无视其他颜色的边, 只考察集合 E 的所有边. 问题相当于要我们证明存在 b_i, b_j, g_u, g_v 使得这四点构成完全二部图. 记 x_i 为 $\deg g_i$, 我们有 $X = \sum_{i=1}^{13} x_i \geq 31$.

考察三元组 (p,q,r) 使得 b_p,b_q 均与 g_r 相邻, 如果结论不真, 则给定 p,q 至多有一个 r 满足上述条件. 于是我们得到不等式约束

$$21=\binom{7}{2}\geq\sum_{i=1}^{13}\binom{x_i}{2}=\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{13}x_i^2-\sum_{i=1}^{13}x_i\right). \tag{5}$$

再利用 Cauchy 不等式

$$13\sum_{i=1}^{13}x_i^2\geq\left(\sum_{i=1}^{13}x_i\right)^2=X^2\implies\sum_{i=1}^{13}x_i^2\geq\frac{X^2}{13}.$$

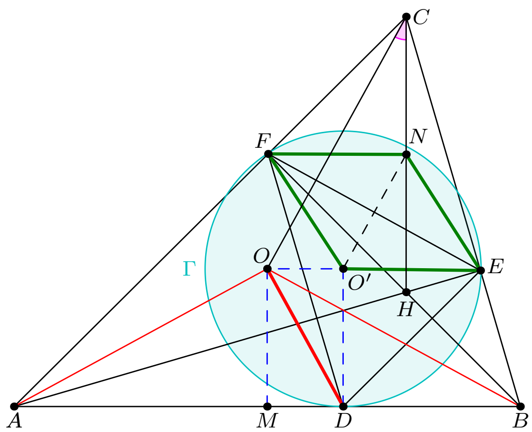
代入 eq. (5) 中得

$$X^2-13X\leq 546\implies X<31.$$

矛盾.

Problem 16. 在锐角三角形 $\triangle ABC(AC\neq BC)$ 中, 已知 $AE\perp BC$ 于点 $E, BF\perp AC$ 于点 F. 过点 E,F 的圆 Γ 且与边 AB 切于点 D. 若 $[ADE]=[BDF]$, 求证: $\angle EDF=\angle ACB$.

Solution. 设 H 为 $\triangle ABC$ 的垂心. 设 M 为 AB 的中点. 设 N 为 CH 的中点. 设 O 是 $\triangle ABC$ 的外心, O' 是 Γ 的圆心.



我们先分析条件 $[ADE]=[BDF]$ 告诉了我们什么信息:

$$\frac{1}{2}AD\cdot AE\cos B=[ADE]=[BDF]=\frac{1}{2}BF\cdot BD\cos A.$$

利用 $BF=AB\sin A, AE=AB\sin B$ 可以推出

$$\frac{DA}{DB}=\frac{\sin(\pi-2A)}{\sin(\pi-2B)}. \tag{6}$$

另一方面, 观察 $\triangle AOB$, 我们有

$$\frac{DA}{DB}=\frac{\sin\angle AOD}{\sin\angle BOD}. \tag{7}$$

注意到 $\angle AOD+\angle BOD=2\angle C=(\pi-2\angle A)+(\pi-2\angle B)$, 结合 eq. (6) and eq. (7) 便推出 $\angle AOD=\pi-2A, \angle BOD=\pi-2B\implies\angle MOD=\angle B-\angle A$.

根据 Newton 定理 M,N,EF 的中点三点共线, 由此知 M,O',N 三点共线 (recall that N is the circumcenter of C,F,H,E). It is well-known that $OMNC$ is a parallelogram, hence $\angle OMO'=\angle OMN=\angle OCN=\angle B-\angle A=\angle MOD$. 这意味着 $OMDO'$ 是一个矩形 $\implies O'D=OM=CN\implies O'$ 是 N 关于 EF 的 reflection. 故 $2\angle ACB=\angle ENF=\angle EO'F=2\angle EDF$.

References

[1] Balkan Mathematical Olympiad 2008 Problem 2.
https://artofproblemsolving.com/community/c6h203654p1120871.

[2] Cubic equation. https://en.wikipedia.org/wiki/Cubic_equation.