2017 年校际数学比赛参考解答

Complex2-老爹

contact@complex2math.com

February 14, 2017

My life is nothing but a comedy.

Contents

Preface

本次比赛共有 8 道题, 其中第 1, 2 题的分值为 7, 8 分, 第 3-5 题的分值为 10 分, 第 6-8 的分值为 15 分.

- 题 1-5 是填充题, 若能给出正确答案, 就能获得 5 分, 若能给出正确答案的同时还能给予完整的证明或解释, 则可获得该题的全部分数.
- 题 6-8 是证明题, 需要给出完整的证明过程.

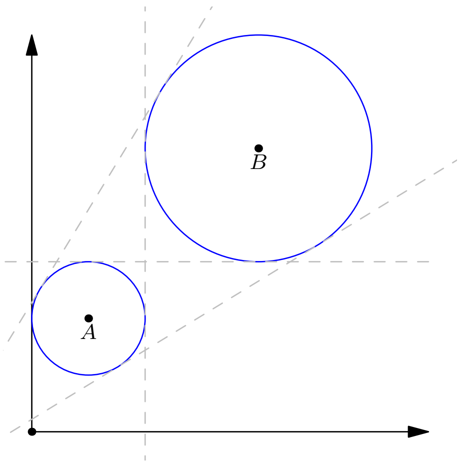
Please check https://complex2math.com/blog/macmo-2017-release/ for any update.

Problem 1. 坐标平面上与点 $A(1,2)$ 距离为 1, 且与点 $B(4,5)$ 的距离为 2 的直线有多少条?

Solution. 答案是 $\boxed{4.}$ 如图, 作以 A 为圆心半径为 1 的圆, 作以 B 为圆心半径为 2 的圆, 注意到

$$\operatorname{dist}(A,B)=\sqrt{(4-1)^2+(5-2)^2}=3\sqrt{2}>3,$$

故两圆外离, 符合条件的直线应当与上述两圆相切, 这样的直线显然有 4 条, 分别是两条内公切线和两条外公切线.



Problem 2. 正数 x,a,b 满足 $\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}=\frac{1}{a+b}$, 试用 a,b 表示 $\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}$.

Solution. 答案是 $\boxed{\frac{1}{(a+b)^3}.}$ 考虑 Cauchy 不等式有

$$1=(a+b)\left(\frac{\sin^4 x}{a}+\frac{\cos^4 x}{b}\right)\geq(\sin^2 x+\cos^2 x)^2=1,$$

等号成立的条件是 $\sin^4 x=\lambda a^2, \cos^4 x=\lambda b^2$. 代入原式得 $\lambda(a+b)=\frac{1}{a+b}\implies\lambda=\frac{1}{(a+b)^2}$. 故

$$\frac{\sin^8 x}{a^3}+\frac{\cos^8 x}{b^3}=\frac{\lambda^2 a^4}{a^3}+\frac{\lambda^2 b^4}{b^3}=\lambda^2(a+b)=\frac{1}{(a+b)^3}.$$

Problem 3. 对任意正整数 n, 用 n 来表示和式 $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\cos^n(\frac{k\pi}{n})$.

Solution. 答案是 $\boxed{\frac{n}{2^{n-1}}.}$ 我们把 cos 替换掉:

$$\cos^n\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n, \theta=\frac{k\pi}{n}.$$

于是

$$S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}e^{i\frac{j\cdot k\pi}{n}}\times e^{-i\frac{(n-j)\cdot k\pi}{n}}.$$

换顺求和得

$$S_n=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k e^{i\frac{(2j-n)\cdot k\pi}{n}}=\frac{1}{2^n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\sum_{k=0}^{n-1}e^{i\frac{2j\cdot k\pi}{n}}.$$

注意到对 $j = 0$ 或 n, 有 $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2j\cdot k\pi}{n}} = n$. 对于 $1 \le j \le n-1$, 我们发现 $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{2j\cdot k\pi}{n}}$ 实际上是对 n 次单位根的求和, 在该根不为 1 的情况下和为 0 (比如对于三次单位根 $\omega \ne 1$, 我们有 $\omega^2+\omega+1=0$). 因此

$$S_n = \frac{1}{2^n} \times 2n = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Problem 4. 请将 $\frac{1}{\sqrt[3]{4}+5\sqrt[3]{2}+1}$ 表示为 $a\sqrt[3]{4}+b\sqrt[3]{2}+c$ 的形式, 其中 a, b, c 为有理数.

Solution. 答案是 $\boxed{\frac{8}{35}\sqrt[3]{4} - \frac{1}{35}\sqrt[3]{2} - \frac{3}{35}.}$ 设 $\sqrt[3]{2} = x$, 利用 $x^3 = 2$ 我们考虑

$$\begin{aligned} 1 &= (x^2+5x+1)(ax^2+bx+c) \\ &= ax^4 + (b+5a)x^3 + (a+c+5b)x^2 + (b+5c)x + c \\ &= (a+c+5b)x^2 + (2a+b+5c)x + (2b+5a+c). \end{aligned}$$

于是我们有

$$\begin{cases} a+c+5b &= 0, \\ 2a+b+5c &= 0, \\ 2b+5a+c &= 1. \end{cases}$$

解上述方程即得答案.

Problem 5. 实数 x, y, z 满足 $xyz = 32$ 及 $x+y+z = 4$, 求 $|x|+|y|+|z|$ 的最小值.

Solution. 答案是 $\boxed{12.}$ 如果 x, y, z 都是正数, 则 $32 = xyz \le (\frac{4}{3})^3$, 矛盾. 不失一般性, 设 $x, y < 0, x+y =: a < 0$, 则

$$M = |x|+|y|+|z| = -x-y+4-a = 4-2a.$$

下面我们求 a 的最大值. 由 AM-GM 不等式有

$$32 = xy(4-a) \le \frac{a^2}{4}(4-a) \implies (a+4)(a^2-8a+32) \le 0 \implies a \le -4.$$

故 $M_{\min} = 4+8 = 12$.

Problem 6. 在一组翻译员中, 每人都会一种或多种语言, 其中 24 人会说日本语, 24 人会说中文, 及 24 人会说英文. 求证: 可以在这组人中选出一些人, 使得恰好有 12 人会说日本語, 恰好 12 人会说中文, 及恰好 12 人会说英文.

Solution. 我们把每一个翻译员对应到一个三元数组 (x_1, x_2, x_3), 其中 $x_i = 1$ 或 0, 代表该名翻译员会或不会第 i 种语言. 于是问题相当于要我们找出某些三元组, 把它们求和 (按分量) 得到 $(12, 12, 12)$. 设 a, b, c, d, e, f, g 分别代表三元组 $(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1), (1,1,1)$ 的个数. 我们有如下三个等式

$$a+d+e+g = 24, \tag{1}$$

$$b+d+f+g = 24, \tag{2}$$

$$c+e+f+g = 24. \tag{3}$$

我们考虑

$$F := \min\{a,b,c\} + 2\min\{d,e,f\} + g.$$

注意到若 $F \geq 12$, 则我们有

$$\min\{a,b,c\}\cdot((1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1))+ \\ 2\min\{d,e,f\}\cdot((1,1,0)+(1,0,1)+(0,1,1))+g(1,1,1)=F(1,1,1).$$

结论成立. 下面假设 $F < 12$, 且不妨设 $a = \min\{a,b,c\}$. 我们有以下三种情形.

Case 1: $d = \min\{d,e,f\}$. 我们有

$$a + 2d + g < 12, \tag{4}$$

一方面利用 eq. (1) 有

$$12 > a+d+e+g+d-e = 24+d-e \implies e > 12+d \geq 12. \tag{5}$$

再把 eq. (5) 代入 eq. (3) 得

$$24 = c+e+f+g > c+12+d+f+g = c+12+24-b \implies b > c+12 \geq 12. \tag{6}$$

这里我们利用了 $d+f+g = 24-b$ (c.f. eq. (2)). 综合 eq. (5), eq. (6) 知我们可以合并 $(0,1,0)$ 和 $(1,0,1)$ 达到 $(12,12,12)$.

Case 2: $e = \min\{d,e,f\}$. 事实上 Case 2 与 Case 1 地位平等.

Case 3: $f = \min\{d,e,f\}$. 我们有

$$a + 2f + g < 12. \tag{7}$$

利用 eq. (1) 知 $a+g = 24-d-e$ 并代入 eq. (7) 得

$$24-d-e+2f < 12 \implies d+e > 12+2f \geq 12. \tag{8}$$

比较 eq. (1), eq. (2) 得

$$a+e = b+f.$$

同理比较 eq. (1), eq. (3) 得

$$a+d = c+f,$$

上述两式相加并利用 eq. (8) 得

$$b+c+2f = 2a+d+e > 2a+12+2f \implies b+c > 12+2a \geq 12. \tag{9}$$

最后, 比较 eq. (2), eq. (3) 得

$$b+d = c+e \implies b-e = c-d, \tag{10}$$

这意味着如果 $b = \min\{b,e\}$, 则我们一定有 $c = \min\{c,d\}$. 因此根据 eq. (8), eq. (9) 知

$$\min\{b,e\}+\min\{c,d\} = \begin{cases} b+c & \text{or} \\ d+e \end{cases} \geq 12.$$

这意味着我们可以把 $\min\{b,e\}$ 个 $(0,1,0)$ 和 $(1,0,1)$ 相加, 再把 $\min\{c,d\}$ 个 $(0,0,1)$ 和 $(1,1,0)$ 相加, 最终达到 $(12,12,12)$.

Problem 7. 试求满足方程 $x^3+27xy+2009=y^3$ 的所有整数解对 (x,y).

Solution. 设 $y=x+a$, 代入原式得

$$\begin{aligned}27x(x+a)+2009&=a^3+3xa(x+a)\\3x(x+a)(9-a)&=a^3-729-1280,\end{aligned}$$

整理得

$$2^8\times 5=1280=(a-9)(a^2+81+9a+3ax+3x^2). \tag{11}$$

另一方面整理成关于 x 的二次式有

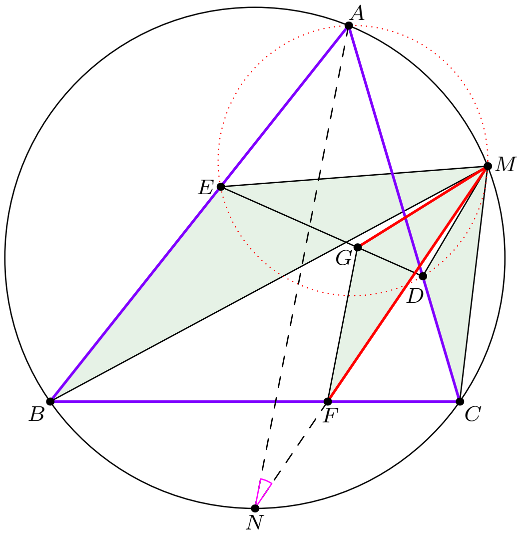
$$3(9-a)x^2+3a(9-a)x+2009-a^3=0.$$

它的判别式为

$$\begin{aligned}\Delta&=9a^2(9-a)^2-12(9-a)(2009-a^3)\\&=3(9-a)(a^3+27a^2-4\times 2009)\\&=3(9-a)(a-14)(a^2+41a+574)\geq 0.\end{aligned}$$

这迫使 $9\leq a\leq 14$. 结合 eq. (11) 知 a 的可能值为 $10,11,13,14$, 逐个验证知只有 $a=14$ 能使 Δ 是完全平方数, 此时 $(x,y)=(-7,7)$.

Problem 8. 点 D,E 分别位于 $\triangle ABC$ 的边 AC,AB 上. 点 F,G 分别为线段 BC,ED 上的点使得 $BF:FC=EG:GD=BE:CD$. 求证 GF 平行 $\angle BAC$ 的平分线.



Solution. 设 N 为劣弧 $\widehat{BC}$ 的中点, M 为 E,D 关于 $\triangle ABC$ 的 Miquel 点. 由 Miquel 点的性质知 $\triangle MEB\sim\triangle MDC \implies \frac{ME}{MD}=\frac{BE}{CD}=\frac{EG}{GD}\implies MG$ 是 $\triangle EMD$ 的角平分线, 同理 MF 是 $\triangle BMC$ 的角平分线. 由 Miquel 点的性质知 M 是 $\triangle EMD$ 到 $\triangle BMC$ 的 Spiral center, 故

$$\triangle MEB\sim\triangle MGF\sim\triangle MDC.$$

另一方面, MF 与 $\angle BAC$ 的平分线显然交于 N, 因此

$$\angle MNA=\widehat{AM}=\angle MBE=\angle MFG\implies AN\parallel GF.$$