2016 年校际数学比赛参考解答

Complex2-老爹

contact@complex2math.com

December 9, 2016

My life is nothing but a comedy.

Contents

Preface

本次比赛共有 10 道题, 其中前 6 题为填空题, 后 4 题为解答题, 填空题每题 5 分, 解答题每题 10 分.

Please check https://complex2math.com/blog/macmo-2016-release/ for any update.

Problem 1. 设 a, b 为整数, 使得 $S = a^2 + 3b^2$ 是偶, 则 $S \mod 8$ 的余数是多少.

Solution. 答案是 $\boxed{0, 4.}$ 穷举 a, b 的奇偶性即可.

Problem 2. 若正整数 n 是其数字和的 300 倍, 求 n. [1]

Solution. 答案是 $\boxed{2700.}$ 记 $d(n) :=$ 正整数 n 的数字和. 显然 n 是 100 的倍数, 设 $n = 100k$, 有 $100 \cdot k = 300 \cdot d(n) = 300 \cdot d(k) \implies k = 3 \cdot d(k)$. 设 k 为 b 位数, 则 $10^{b-1} \le k = 3 \cdot d(k) \le 3 \cdot 9b = 27b \implies b \le 2$. 显然 k 只能为两位数 $10p + q$, 代入得 $7p = 2q$, 这迫使 $p = 2, q = 7$.

Problem 3. 分解 $x^8 + 4x^2 + 4$ 为两个四次多项式的积.

Solution. 非常巧妙地有

$$x^8 + 4x^2 + 4 = (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2).$$

Problem 4. 已知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为平面上的单位向量且 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$. 若平面向量 $\mathbf{x}$ 满足 $(3\mathbf{a} - \mathbf{x}) \cdot (4\mathbf{b} - \mathbf{x}) = 0$, 则 $\mathbf{x}$ 的长度 $|\mathbf{x}|$ 的最大值是多少.

Solution. 答案是 $\boxed{5.}$ 由 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ 知 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 垂直, 不妨设 $\mathbf{a} = (1, 0), \mathbf{b} = (0, 1), \mathbf{x} = (x, y)$. 我们有

$$0 = (3 - x, -y) \cdot (-x, 4 - y) = x(x - 3) + y(y - 4) = x^2 + y^2 - 3x - 4y = 0.$$

由 Cauchy 不等式有

$$(x^2 + y^2)(9 + 16) \ge (3x + 4y)^2 = (x^2 + y^2)^2 \implies x^2 + y^2 \le 25.$$

Problem 5. 若 y_1, y_2, y_3 为 $y^3 + 3y + 2016 = 0$ 的三个互异根, α 满足 $\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$, 则 $(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)(y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3)$ 的值是多少.

Solution. 答案是 $\boxed{-9.}$ 由 Vieta 定理有

$$\begin{aligned} S_1 &= y_1 + y_2 + y_3 = 0, \\ S_2 &= y_1 y_2 + y_2 y_3 + y_3 y_1 = 3. \end{aligned}$$

由 α 的定义知 α 是 3 次单位根, 即 $\alpha^3 = 1, \alpha^2 + \alpha = -1$, 直接展开表达式有

$$\begin{aligned} &(y_1 + \alpha y_2 + \alpha^2 y_3)(y_1 + \alpha^2 y_2 + \alpha y_3) \\ &= y_1^2 + \alpha^3 y_2^2 + \alpha^3 y_3^2 + (\alpha^2 + \alpha)(y_1 y_2 + y_1 y_3) + \alpha^2(\alpha^2 + 1) y_2 y_3 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 + \alpha^2(-\alpha) y_2 y_3 \\ &= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - y_1 y_2 - y_1 y_3 - y_2 y_3 \\ &= S_1^2 - 3S_2 = -9. \end{aligned}$$

[1]在比赛的试卷中, 该题的描述有问题, 是一条错题.

Problem 6. 若四边形 $ABCD$ 满足 $AB+CD=6$ 及 $BC+DA=8$, 则它的面积的最大值是多少.

Solution. 答案是 $\boxed{\frac{25}{2}}$. 由 AM-GM 不等式有 $AB\cdot CD=9, BC\cdot AD\le 16$. 设对角线 AC,BD 的夹角为 θ, 由托勒密定理及四边形的面积公式知

$$[ABCD]=\frac{1}{2}(AC\cdot BD\cdot\sin\theta)\le\frac{1}{2}(AC\cdot BD)\le\frac{1}{2}(AB\cdot CD+BC\cdot AD)\le\frac{25}{2}.$$

Problem 7. 令 $S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, n\ge 3$. 求证:

$$n(n+1)^{\frac{1}{n}}<S_n<n-(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.$$

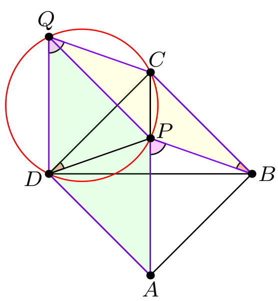
Solution. 先证左边, 我们有

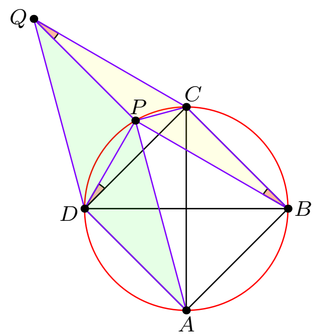
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}+n&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}+1\right)\\&=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i+1}{i}\right)\\&\ge n\cdot\sqrt[n]{\frac{2}{1}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}}\\&=n(n+1)^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

类似地可以证明右边

$$\begin{aligned}n-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i}&=\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{i}\right)\\&=\sum_{i=2}^{n}\left(\frac{i-1}{i}\right)\\&\ge(n-1)\sqrt[n-1]{\frac{1}{2}\times\cdots\times\frac{n-1}{n}}\\&=(n-1)n^{-\frac{1}{n-1}}.\end{aligned}$$

Problem 8. 设 $ABCD$ 是正方形, 点 P 满足 $\angle APB+\angle CPD=180^\circ$, 求点 P 的轨迹.





Solution. 如图所示, 构造平行四边形 $PBCQ$, 注意到此时此刻 $PQDA$ 也是一个平行四边形.

Case 1: 若 P 在正方形的内部. 我们有 $\measuredangle DQC + \measuredangle CPD = \measuredangle APB + \measuredangle CPD = 180°$, 故 C, Q, D, P 四点共圆 $\implies \measuredangle PDC = \measuredangle PQC = \measuredangle CBP \implies P$ 在对角线 AC 或 BD 上.

Case 2: 若 P 在正方形的外部. 我们有 $QP \perp CD$ 且 $\measuredangle DQC + \measuredangle DPC = \measuredangle APB + \measuredangle DPC = 180° \implies P$ 是 $\triangle CQD$ 的垂心. 因此 $\measuredangle CBP = \measuredangle PQC = \measuredangle CDP \implies P$ 在正方形 $ABCD$ 的外接圆上.

Problem 9. 求证: 在任意 39 个连续的正整数中, 其中一个的数字和必定是 11 的倍数.

Solution. 假设结论不真, 记 $d(n) :=$ 正整数 n 的数字和. 注意到我们有

$$d(n) \equiv \begin{cases} d(n-1)+1 & \text{if } n \nmid 10 \\ d(n-1)+3 & \text{if } n \mid 10 \text{ and } n \nmid 100 \\ d(n-1)+b & \text{for some } b \in \{0,1,2,\cdots,10\} \text{ if } n \mid 100 \end{cases} \pmod{11}. \tag{1}$$

比如说 $d(10) \equiv d(9)+3 \equiv 1 \pmod{11}$, $d(10000) = d(9999)+9 \pmod{11}$. 由于只有连续的 39 个正整数 $a_1, \cdots, a_{39}$, 故其中至多只有一个数是 100 的倍数. 设其中第一个为 10 的倍数的是 a_k, 则显然 $k \le 10$. 若 $a_k \equiv j \pmod{11}, j \ge 2$, 则此时 $d(a_{k+11-j})$ 便是 11 的倍数, 矛盾, 所以只能是 $j = 1$.

进一步地, $a_{k+9} \equiv 10 \pmod{11}$. 类似上述讨论 a_{k+10} 也必须 $\equiv 1 \pmod{11}$ (否则考虑 a_{k+21-j}, 其中 j 是 $a_{k+10} \mod 11$ 的余数). 这要求 $d(a_{k+10}) \equiv d(a_{k+9}) + 2 \pmod{11}$, 即 a_{k+10} 必为 100 的倍数. 再考虑 a_{k+20}, 它必然是 10 的倍数且不是 100 的倍数, 于是 $d(a_{k+20}) \equiv d(a_{k+19}) + 3 \equiv 2 \pmod{11}$, 此时 $d(a_{k+29})$ 便是 11 的倍数且 $k + 29 \le 39$, 矛盾.

Remark. 事实上, 这里的 39 是最优的, 我们可以举出 38 的反例:

999981	999982	$\cdots$	999989	999990
999991	999992	$\cdots$	999999	1000000
$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
1000011	1000012	$\cdots$	1000018	

Problem 10. 展开 $(x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n)^2 = a_0 + a_1 x + \cdots + a_{2n} x^{2n}$ 为关于 x 的多项式, 用 n 来表示和式 $a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$.

Lemma 1 (Summation by parts)**.** 设 $\{a_k\}, \{b_k\}$ 是两个数列, 记 $B_j = \sum_{i=1}^{j} b_i, j = 1, 2, \cdots, n$ 则我们有

$$a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) \cdot B_i + a_n \cdot B_n.$$

Proof. 经典的 Abel 分部求和, 证明略. □

Lemma 2 (组合恒等式)**.** 给定正整数 n, k 其中 $n > k$. 我们有以下恒等式

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}.$$

Proof. 利用数学归纳法, 具体证明略. □

Solution. 令 $x=1$ 代入原式知 $a_0+\cdots+a_{2n}=\frac{n^2(n+1)^2}{4}$. 下面我们求 $a_0+\cdots+a_n$. 先分析任意一个 a_k, 我们有

$$a_k=\sum_{i=1}^{k-1} i(k-i).$$

利用 lem 1 有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k-1} i(k-i) &= \sum_{i=1}^{k-2}\frac{i(i+1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2} i^2+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-2} i+\frac{k(k-1)}{2}\\
&=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-2)(k-1)(2k-3)}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-2)(k-1)}{2}+\frac{k(k-1)}{2}\\
&=\frac{(k-2)(k-1)}{4}\left(\frac{2k-3}{3}+1\right)+\frac{k(k-1)}{2}\\
&=\frac{k(k-1)(k-2)}{6}+\frac{k(k-1)}{2}\\
&=\binom{k}{3}+\binom{k}{2}\\
&=\binom{k+1}{3}.
\end{aligned}$$

故

$$\sum_{i=0}^{n} a_i=\sum_{i=0}^{n}\binom{i+1}{3}=\binom{n+2}{4}=\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}.$$

于是

$$\begin{aligned}
a_{n+1}+\cdots+a_{2n} &= \frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{(n+2)(n+1)n(n-1)}{24}\\
&=\frac{n(n+1)}{24}\left(6n(n+1)-(n+2)(n-1)\right)\\
&=\frac{n(n+1)(5n^2+5n+2)}{24}.
\end{aligned}$$