1. 设 K 为 $\mathbb{Q}$ 的 n 次扩张, 假设 2 在 $\mathcal{O}_K$ 上完全分裂. 证明有 $\mathbb{F}_2$-代数同构:

$$\mathcal{O}_K/(2\mathcal{O}_K) \cong \prod_{i=1}^{n} \mathbb{F}_2.$$

2. 对于一个 $\mathbb{F}_2$ 代数, 记 $\mathrm{Hom}(A, \mathbb{F}_2)$ 为 A 到 $\mathbb{F}_2$ 的 $\mathbb{F}_2$-代数同态的集合. 令 d 为一正整数, 记 $\mathbb{F}_2[X_1, \cdots, X_d]$ 为 $\mathbb{F}_2$ 上由 d 个元素生成的多项式代数, 证明集合

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{F}_2[X_1, \cdots, X_d], \mathbb{F}_2)$$

恰有 2^d 个元素.

3. 设数域 K 满足题目 1 中的条件, 假设作为 $\mathbb{Z}$ 上代数, $\mathcal{O}_K$ 可由 d 个元素生成, 证明 $[K : \mathbb{Q}] \leq 2^d$.

4. 令 K 为 $\mathbb{Q}(\zeta_{151})$ (ζ_{151} 为 151 次本原单位根), 我们有事实 $\mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\zeta_{151}]$ (可以在该题目中使用).

(4.1) 证明对于素数 $p \neq 151$, p 在 $\mathcal{O}_K$ 中非分歧.

(4.2) 令 $p \neq 151$ 为一个素数, $\mathfrak{P}$ 为 $\mathcal{O}_K$ 的一个素理想, 满足 $\mathfrak{P}|p$. 记 $D_{\mathfrak{P}} \subseteq \mathrm{Gal}(K, \mathbb{Q})$ 为 $\mathfrak{P}$ 的 decomposition group. 证明 $D_{\mathfrak{P}}$ 可由元素 $\zeta_{151} \mapsto \zeta_{151}^p$ 生成.

(4.3) 证明 K 包含一个唯一的子域 L 满足 $[L : \mathbb{Q}] = 10$.

(4.4) 证明 2 在 L 中完全分裂.

(4.5) 证明作为 $\mathbb{Z}$ 上代数, $\mathcal{O}_L$ 不能由 3 个元素生成.